

Einstufungsprüfung

Mathematik und Elektrotechnik

für Industrietechnologen

**Manuskript
(Stand: Juli 2004)**

Dr. Thomas Gründer

Zielsetzung

Industrietechnologen (associate engineers) aller Technik-Akademien der Siemens AG können unter den Voraussetzungen

- 1.) guter Abschluss der Ausbildung (<2.0) und dem
- 2.) Vorliegen eines Fördervertrages einer kooperierenden Abteilung der Siemens AG

zur schriftlichen Einstufungsprüfung der Technischen Fachhochschule Berlin in den Fächern *Mathematik, Elektrotechnik, Elektronik, Digitaltechnik, Software-Entwicklung* und *Programmiersprachen* zugelassen werden. Darüberhinaus findet ein Kolloquium in den Fächern *Betriebswirtschaftslehre* und *Englisch* statt.

Das erfolgreiche Bestehen der Einstufungsprüfung berechtigt die Absolventen der Siemens Technik Akademien die Studiendauer im dualen Studiengang *Communication Systems* des Fachbereiches VII auf 3-4 Semester incl. Bachelor-Arbeit zu verkürzen.

Das vorliegende Manuskript bezieht sich nur auf die Komplexprüfung *Mathematik und Elektrotechnik* und umfasst die prüfungsrelevanten Gebiete

Mathematik: Lineare Algebra (Matrizenrechnung), Komplexe Zahlen, Integration und Laplace-Transformation

Elektrotechnik: Gleichstromkreis, Mittelwerte von Wechselgrößen, Komplexe Wechselstromrechnung und Frequenzgang.

Teil (I): Mathematik für Ingenieure

1. Matrizenrechnung

Die Matrizenrechnung stellt ein Teilgebiet der linearen Algebra dar und kann u.a. bei der übersichtlichen Darstellung und Lösung großer Gleichungssysteme einen wichtigen Beitrag leisten.

1.1. Überblick und Darstellung

Das rechteckige Zahlenschema

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n} \quad (\text{Glg. 1.1})$$

heißt eine $(m \times n)$ -Matrix mit dem ganzzahligen Zeilenindex $i=1, \dots, m$ und dem ganzzahligen Spaltenindex $j=1, \dots, n$. Die Anwendung der Matrix \mathbf{A} auf den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T$$

des n -dimensionalen Vektorraumes \mathbb{R}^n ist durch

$$\mathbf{A} \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} \quad (\text{Glg. 1.2})$$

erklärt. Die durch (Glg. 1.2) vorgenommene Definition ist eine Abbildung des n -dimensionalen Vektorraumes \mathbb{R}^n auf den m -dimensionalen \mathbb{R}^m .

1.2. Rang einer Matrix und Lösbarkeit von Gleichungssystemen

Zwei Zeilen, bzw. Spalten, einer Matrix sind genau dann linear unabhängig, wenn sie sich nicht durch ein Vielfaches der anderen Zeile (Spalte) ausdrücken lassen. Für die i -te und j -te Zeile (Spalte) gilt dann

$$c_i \cdot \vec{a}_i + c_j \cdot \vec{a}_j \neq \vec{0} \quad ; \quad c_i, c_j \neq 0 \quad .$$

Ferner gilt der nachfolgende **Satz**:

In einer beliebigen Matrix ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen gleich der Anzahl der linear unabhängigen Spalten. Diese Anzahl wird als Rang der Matrix bezeichnet. Der Rang bleibt erhalten, wenn man Zeilen (Spalten) vertauscht oder Vielfache einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) addiert.

Beispiel: Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & -9 \\ 2 & 0 & -13 & 23 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Zur Feststellung des Rangs werden elementare Zeilenoperationen nach dem Gauß-Algorithmus durchgeführt. Im ersten Schritt bleibt die erste Zeile erhalten und die darunterliegenden Elemente der ersten Spalte *ausgeräumt*:

$$\begin{array}{l} \text{Aktion} \\ \vdots \\ (1) + (2) \\ -2 \cdot (1) + (3) \\ (1) - (4) \end{array} \begin{array}{l} \vdots \\ 1 \quad 3 \quad -2 \quad 4 \\ \vdots \\ 0 \quad 2 \quad 3 \quad -5 \\ \vdots \\ 0 \quad -6 \quad -9 \quad 15 \\ \vdots \\ 0 \quad -2 \quad -3 \quad 6 \\ \vdots \end{array}$$

Der zweite Schritt nutzt das Pivot-Element $a_{22}=2$, um die darunterliegenden Elemente in der zweiten Spalte auszuräumen:

$$\begin{array}{l} \text{Aktion} \\ \vdots \\ 3 \cdot (2) + (3) \\ (2) + (4) \end{array} \begin{array}{l} \vdots \\ 1 \quad 3 \quad -2 \quad 4 \\ \vdots \\ 0 \quad 2 \quad 3 \quad -5 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \vdots \end{array}$$

Das Ergebnis enthält eine Nullzeile, d.h. obwohl es sich um eine 4x4-Matrix handelt sind nur drei Zeilen linear unabhängig und damit ist $\text{Rang}(\mathbf{A})=3$.

Der Rang einer Matrix ist im Zusammenhang mit der eindeutigen Lösung des zugehörigen Gleichungssystems wichtig: Ein Gleichungssystem mit n Gleichungen für n Unbekannte ist genau dann eindeutig lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} ebenfalls gleich n ist. Im obigen Beispiel ist $\text{Rang}(\mathbf{A})=3$ und die zugehörige Determinante $\det(\mathbf{A})=0$. Aus diesem Grund hat das homogene Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

nicht nur die triviale (sofort ersichtliche) Lösung $\vec{x} = \vec{0}$, sondern auch nichttriviale Lösungen, d.h. mindestens eine Variable x_i ist frei wählbar.

1.3. Operationen mit Matrizen

1.3.1. Multiplikation mit einem Skalar

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar λ (i.a. komplexwertig) ist definiert durch

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (\text{Glg. 1.3})$$

d.h. jedes Matrixelement wird mit dem Skalar multipliziert.

1.3.2. Addition und Subtraktion zweier Matrizen

Stimmen die Spalten- und Zeilenzahl zweier Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} überein, so werden die Addition und Subtraktion elementweise durchgeführt; es gelten die folgenden Gesetze:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad , \quad (\text{Kommutativgesetz}) \\ \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad . \end{aligned} \quad (\text{Glg. 1.4})$$

1.3.3. Matrizenmultiplikation

Stimmt die Spaltenzahl von \mathbf{A} mit der Zeilenzahl von \mathbf{B} überein, so können die Elemente c_{ij} des Produktes $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ mit dem Skalarprodukt aus dem i -ten Zeilenvektor von \mathbf{A} und dem j -ten Spaltenvektor von \mathbf{B} berechnet werden:

$$c_{ij} = (a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \quad . \quad (\text{Glg. 1.5})$$

Es gelten die Gesetze

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad , \quad (\text{Assoziativgesetz}) \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad . \quad (\text{Distributivgesetz}) \end{aligned} \quad (\text{Glg. 1.6})$$

Man beachte, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, d.h. im Normalfall für das Produkt zweier $n \times n$ -Matrizen gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad .$$

1.3.4. Die Einheitsmatrix \mathbf{E}

Das neutrale Element der Multiplikation ist die Einheitsmatrix \mathbf{E} , mit den Elementen

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} . \quad (\text{Glg. 1.7})$$

Für die Multiplikation einer Matrix \mathbf{A} mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} gleicher Zeilen- und Spaltenzahl gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} . \quad (\text{Glg. 1.8})$$

1.3.5. Die inverse Matrix

Unter der Voraussetzung einer regulären Matrix \mathbf{A} , d.h. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, existiert die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} mit

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} . \quad (\text{Glg. 1.9})$$

Die Berechnung kann mit einem Schema und elementaren Zeilen-/Spaltenoperationen erfolgen; hierzu das nachfolgende Beispiel.

Beispiel: Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

deren Inverse $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden soll. Nach (Glg. 1.9) muss gelten:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

man erhält also insgesamt 9 Gleichungen für die Elemente x_{11}, \dots, x_{33} der inversen Matrix \mathbf{A}^{-1} . Das entstehende Gleichungssystem kann formal wieder mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden. Hierzu schreibe man schematisch (ohne die gesuchten Elemente x_{ij}):

$$\begin{array}{r|ccc|ccc}
 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 - [2 \cdot (1) + (2)] & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\
 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 (1) + (2) & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\
 [-2 \cdot (2) + (3)]/7 & 0 & 0 & 1 & 4/7 & 2/7 & 1/7 \\
 \hline
 (1) + (3) & 1 & 0 & 0 & -3/7 & -5/7 & 1/7 \\
 & 0 & 1 & 0 & -2/7 & -1/7 & 3/7 \\
 (2) + 3 \cdot (3) & 0 & 0 & 1 & 4/7 & 2/7 & 1/7
 \end{array}$$

Für die gesuchte inverse Matrix erhält man somit

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/7 & -5/7 & 1/7 \\ -2/7 & -1/7 & 3/7 \\ 4/7 & 2/7 & 1/7 \end{pmatrix} .$$

1.3.6. Aufgaben

Gegeben sind die zwei Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 - \alpha \end{pmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} , \quad \alpha \in \mathbb{C} .$$

- 1.) Für welche Werte von a wird die Matrix \mathbf{A} singulär?

$$\text{Ergebnis: } \alpha_{1/2} = -\frac{7}{6} \pm j \frac{\sqrt{23}}{6} .$$

- 2.) Es werde $a=0$ gesetzt; berechne die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} .

$$\text{Ergebnis: } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7/6 & 2/3 & -1 \\ 5/6 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

- 3.) Lösen Sie $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$!

$$\text{Ergebnis: } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 20/6 & 5/6 \\ 10/6 & 13/7 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} .$$

2. Komplexe Zahlen

2.1. Motivation der komplexen Zahlen

Ausgangspunkt für die Einführung komplexer Zahlen ist das Problem der Unlösbarkeit von Gleichungen des Typs

$$x^2 + 1 = 0$$

im Bereich der reellen Zahlen, da $(-|x|)^2$ stets größer gleich Null ist. Durch die Definition des imaginären Operators $j = \sqrt{-1}$ kann für das Problem eine rein imaginäre Lösung angegeben werden; man erhält $x_{1,2} = \pm j$. Durch diese Einführung sind nun auch Gleichungen des Typs

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ,$$

mit negativer Diskriminante $b^2 - 4ac < 0$ lösbar; man schreibt

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{j^2(4ac - b^2)}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm j \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

und nennt $\text{Re}[x_{1,2}] = -b/2a$ den **Realteil** und $\text{Im}[x_{1,2}] = \pm \sqrt{4ac - b^2}/2a$ den **Imaginärteil** der Lösung. Die Lösung für $x_{1/2}$ wird als komplexe Lösung bezeichnet, da sie sich aus einer reellen und einer imaginären Zahl zusammensetzt und der Lösungsraum ist die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} , mit der Definition

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + jy; \quad x, y \in \mathbb{R}\} \quad . \quad (\text{Glg. 2.1})$$

Zum Beweis der Gültigkeit verwende man den Vieta'schen Wurzelsatz und schreibe

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= \left(x + \frac{b}{2a} + j \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - j \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right) = \\ &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \quad . \end{aligned}$$

Das Ergebnis entspricht der normalisierten Form der quadratischen Gleichung.

2.2. Darstellung komplexer Zahlen

Zur grafischen Darstellung komplexer Zahlen $z = x + jy$ genügt der reelle Zahlenstrahl nicht mehr und man führt die **Gaußsche Zahlenebene** mit einer reellen und einer imaginären Achse als kartesisches Koordinatensystem ein. Der Realteil x einer komplexen Zahl z wird auf der reellen, ihr Imaginärteil y auf der imaginären (j -) Achse aufgetragen und im Ergebnis kommt man zu einer quasivektoriellen Darstellung. Obwohl die Regeln der Vektoralgebra weitestgehend anwendbar sind bezeichnet man die grafische Darstellung komplexer Zahlen als Zeiger. Dies liegt z.B. daran, dass man sehr wohl komplexe Zahlen, nicht aber

Vektoren dividieren kann. In der Gaußschen Ebene kann ein komplexer Zeiger \underline{z} in kartesischer oder polarer Form dargestellt werden. Das folgende Bild zeigt den komplexen Zeiger \underline{z} und den dazu konjugiert komplexen \underline{z}^* , der sich nur im Vorzeichen des Winkels unterscheidet.

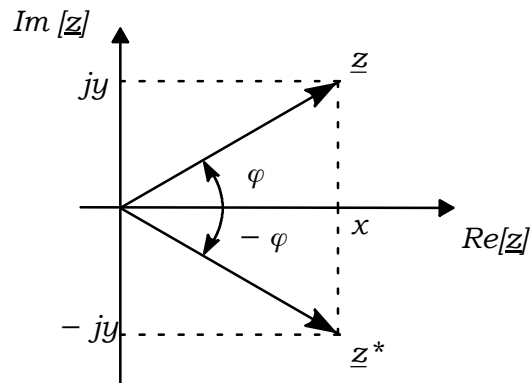


Bild: Komplexer Zeiger \underline{z} und konjugiert komplexer Zeiger \underline{z}^*

In *kartesischer Form* ist die Komponentenschreibweise $\underline{z} = x + jy$ und $\underline{z}^* = x - jy$ für die konjugiert komplexe Zahl. Die *polare Darstellung* erhält man sofort über die Winkelbeziehung

$$\begin{aligned}\underline{z} &= z (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad , & (\text{Glg. 2.2}) \\ \underline{z}^* &= z (\cos \varphi - j \sin \varphi) \quad ,\end{aligned}$$

mit dem Betrag $|\underline{z}| = z$ und dem Winkel φ

$$z = |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad . \quad (\text{Glg. 2.3})$$

Mit der berühmten Eulerschen Gleichung

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (\text{Glg. 2.4})$$

kann die *Exponentialform* für die komplexe Zahl angegeben werden:

$$\underline{z} = z e^{j\varphi} \quad , \quad (\text{Glg. 2.5})$$

bzw. für die konjugiert komplexe Zahl

$$\underline{z}^* = z e^{-j\varphi} \quad .$$

Der Winkelfaktor $e^{j\varphi}$ gibt dabei an, in welche Richtung der Zeiger aus der positiven reellen Achse gedreht ist. Zur Rechenerleichterung lohnt es, sich einige Winkel zu merken, z.B.

$$\begin{aligned}\varphi = 0^\circ & : e^{j0} = 1 , \\ \varphi = \frac{\pi}{2} & : e^{j\frac{\pi}{2}} = j , \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} & : e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j , \\ \varphi = \pm \pi & : e^{\pm j\pi} = -1 .\end{aligned}$$

Die Multiplikation mit j bedeutet Drehung des betreffenden Zeigers in der komplexen Ebene um 90° in mathematisch positiver Richtung; Multiplikation mit $-j$ entspricht der Drehung des Zeigers um -90° .

2.2.1. Rechenregeln für komplexe Zahlen

Die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen führt man sinnvollerweise in Komponentenform durch, so ist

$$\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2) .$$

Die Graphische Bestimmung von Summe und Differenz komplexer Zahlen erfolgt wie die Addition und Subtraktion von Vektoren. Man beachte allerdings, dass man nicht durch Vektoren dividieren kann, durch Zeiger jedoch schon. Zur Multiplikation und Division verwendet man die Exponentialform

$$\begin{aligned}\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 &= z_1 z_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} , \\ \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} &= \frac{z_1}{z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} .\end{aligned}$$

Die Exponentialform ist zum Potenzieren und Radizieren ebenfalls gut geeignet:

$$\underline{z}^n = z^n e^{jn\varphi} , \quad \underline{z}^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{\varphi}{n}} .$$

Für die Differentiation nach dem Winkel φ erhält man

$$\frac{d}{d\varphi} \underline{z} = jz e^{j\varphi} = z e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} .$$

Die Ableitung eines komplexen Zeigers nach dem Winkel φ bedeutet geometrisch also eine Drehung um 90° im mathematisch positiven Sinne. Entsprechend ergibt die Integration nach φ

$$\int \underline{z} d\varphi = \frac{1}{j} z e^{j\varphi} = z e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})} ,$$

d.h. die Integration eines komplexen Zeigers ist also gleichbedeutend mit der Drehung des Zeigers um -90° in der Gaußschen Ebene.

2.2.2. Komplexer Zeiger und Differenzialgleichung

Zur Bestimmung des stationären Zustandes eines Systems kann man die Störfunktion $x(t)$ einer Differenzialgleichung auch gleich komplex ansetzen. Dies wird am Beispiel der DGL eines RC-Gliedes gezeigt; die DGL ist

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

und man setzt an:

$$y(t) = \hat{y} \cdot e^{j\omega t} \quad , \quad x(t) = \hat{x} \cdot e^{j\omega t} \quad .$$

Mit der ersten Ableitung

$$\frac{dy(t)}{dt} = \hat{y} \cdot j\omega e^{j\omega t}$$

gilt für die DGL

$$j\omega T \hat{y} e^{j\omega t} + \hat{y} e^{j\omega t} = \hat{x} e^{j\omega t} \quad .$$

Hieraus entnimmt man, dass der Drehfaktor - wie in der komplexen Wechselstromrechnung üblich - sogar herausgekürzt werden kann und nach Umformung für die komplexe Amplitude der Lösung gilt

$$\hat{y} = \frac{1}{1 + j\omega T} \cdot \hat{x} \quad .$$

Die Aufspaltung in Betrag und Phase liefert

$$\hat{y} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} e^{-j \arctan(\omega T)} \cdot \hat{x}$$

und die Lösung kann im Zeitbereich angegeben werden

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} e^{-j \arctan(\omega T)} \cdot \hat{x} \cdot e^{j\omega t} \right] = \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} e^{j[\omega t - \arctan(\omega T)]} \cdot \hat{x} \right] = \\ &= \frac{\hat{x}}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \sin(\omega t - \arctan(\omega T)) \quad . \end{aligned}$$

Diese Lösung beschreibt ausschließlich den eingeschwungenen Zustand des Netzwerkes und nicht den abklingenden Ausgleichsvorgang, den man bei Einschalten zum Zeitpunkt $t=0$ mit der Laplace-Transformation bestimmt.

2.3. Wurzeln komplexer Zahlen (Kreisteilung)

Komplexe Zahlen sind aufgrund der 2π -Periodizität von

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

mehrdeutig, denn es gilt

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi = \cos(\varphi + 2k\pi) + j \sin(\varphi + 2k\pi) \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

Damit gilt für die n -te Wurzel der komplexen Zahl \underline{z} die Beziehung

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{z} e^{j(\varphi + 2k\pi)/n} = \sqrt[n]{z} \cdot e^{j(\varphi/n + k2\pi/n)} \quad , \quad (\text{Glg. 2.6})$$

bzw. in polarer Darstellung

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{z} \cdot [\cos(\varphi/n + k2\pi/n) + j \sin(\varphi/n + k2\pi/n)] \quad , \quad (\text{Glg. 2.7})$$

$$k = 0, 1, \dots, n - 1 \quad .$$

Beispiel: Gesucht sind die Wurzeln der komplexen Zahl

$$\sqrt[3]{2 + 3j} \quad .$$

Zunächst wird der Radikant in Exponentialform dargestellt; für Betrag und Phase erhält man

$$z = |\underline{z}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad , \quad \varphi = \arctan \frac{3}{2} \approx 0,98 \text{rad} \quad .$$

Damit folgt für den Betrag der drei Lösungen

$$\sqrt[3]{\sqrt{13}} = \sqrt[6]{13} \approx 1,533$$

und die Lösungsformel

$$\sqrt[3]{2 + j} = \sqrt[6]{13} \cdot [\cos(0,98/3 + k2\pi/3) + j \sin(0,98/3 + k2\pi/3)] \quad , \quad k = 0, 1, 2.$$

Die drei Einzellösungen sind dann

$$k = 0: \quad \sqrt[6]{13} \cdot [\cos(0,98/3) + j \sin(0,98/3)] \approx 1,45 + j0,5 \quad ,$$

$$k = 1: \quad \sqrt[6]{13} \cdot [\cos(0,98/3 + 2\pi/3) + j \sin(0,98/3 + 2\pi/3)] \approx -1,16 + j \quad ,$$

$$k = 2: \quad \sqrt[6]{13} \cdot [\cos(0,98/3 + 4\pi/3) + j \sin(0,98/3 + 4\pi/3)] \approx -0,3 - j1,5 \quad .$$

Der Begriff Kreisteilungsgleichung erklärt sich mit den nachfolgenden Bild.

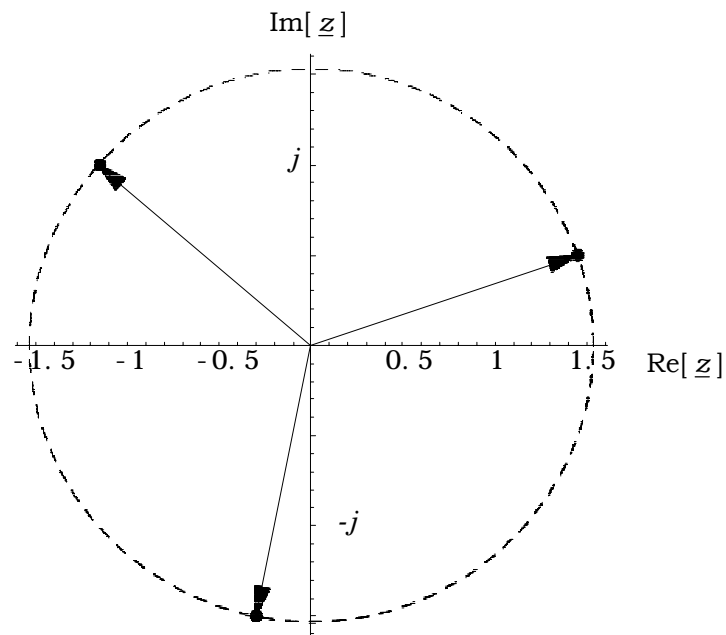


Bild: Zur Kreisteilungsgleichung

Die - hier gerechnete - dritte Wurzel teilt den Kreis mit dem Radius $\sqrt[6]{13}$ in drei gleiche Segmente.

2.4. Aufgaben

- 1.) Berechnen Sie z aus $j(z^3 + j) = 4$.

Ergebnis:

$$z_0 = 1.71j \quad , \quad z_1 = -1.48 - 0.85j \quad , \quad z_2 = 1.48 - 0.85j \quad .$$

- 2.) Berechnen Sie z aus $2z^4 - 1 = j^5$.

Ergebnis:

$$z_0 = -0.9 - 0.18j \quad , \quad z_1 = 0.18 - 0.9j \quad , \\ z_2 = -0.18 + 0.9j \quad , \quad z_3 = 0.9 + 0.18j \quad .$$

3. Integralrechnung

3.1. Überblick

Die Funktion $F(x)$ ist im Intervall $x \in I = [a, b]$ eine Stammfunktion von $f(x)$, wenn

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

gilt. Durch formale Multiplikation mit dx erhält man hieraus das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int f(x)dx + C \quad , \quad (\text{Glg. 3.1})$$

mit der wählbaren Integrationskonstanten C . Bei der Lösung physikalisch motivierter Aufgabenstellungen enthält die Konstante C meist die Anfangsbedingung der physikalischen Größe.

Die Berechnung von Flächen erfolgt durch das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad ; \quad (\text{Glg. 3.2})$$

es gibt den resultierenden Flächeninhalt zwischen $f(x)$ und der x -Achse vorzeichenrichtig wieder. Flächen oberhalb der x -Achse haben positives, Flächen unterhalb der x -Achse ein negatives Vorzeichen. Wechselt also $f(x)$ in I das Vorzeichen, so heben sich negative und positive Flächen gegeneinander auf. In der Elektrotechnik macht man sich dies bei der Berechnung von Mittelwerten rein sinusförmiger Vorgänge zu nutze, es gilt

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = 0 \quad .$$

3.2. Integrationstechnik

In vielen Fällen muss eine Stammfunktion gezielt erraten werden, was einige Erfahrung voraussetzt. Dennoch existieren einige wesentliche Grundregeln, die diesen Prozess systematisieren helfen.

3.2.1. Integrationsregeln

Die Vertauschung der Integrationsgrenzen ändert das Vorzeichen des Integrationsergebnisses:

$$\int_b^a f(x)dx = F[a] - F[b] = - \int_a^b f(x)dx = - [F(b) - F(a)] \quad .$$

Linearität

Die Multiplikation des Integranden mit einer beliebigen Konstanten c liefert:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx \quad ,$$

d.h. die Konstante kann als Faktor vor das Integral geschrieben werden. Wie die Differenziation ist auch die Integration eine lineare Operation; mit den (beliebigen) konstanten Faktoren c_1 und c_2 gilt

$$\int [c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)] dx = c_1 \cdot \int f(x) dx + c_2 \cdot \int g(x) dx \quad .$$

Partielle Integration

Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel der Differenzialrechnung, für die Ableitung des Produktes $v(x)u(x)$ erhält man

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = \frac{du}{dx} \cdot v(x) + u(x) \cdot \frac{dv}{dx} \quad ,$$

bzw. aufgelöst

$$u(x) \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] - v(x) \cdot \frac{du}{dx} \quad .$$

Die formale Integration liefert

$$\int u(x) \cdot \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] dx - \int v(x) \cdot \frac{du}{dx} dx \quad ,$$

bzw. nach - ebenso formalen - Kürzen von dx

$$\int u(x) \cdot dv = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot du \quad .$$

Die Schwierigkeit besteht nun darin, einen Teil des Integranden als $u(x)$ und den anderen als dv zu identifizieren.

Beispiel: Es soll das unbestimmte Integral

$$\int \sin(x) \cdot e^{-x} dx$$

gelöst werden. Man setze beispielsweise $u(x)=\sin(x)$ und $dv=e^{-x} dx$; dies liefert

$$(1) \quad I = \int \sin(x) \cdot e^{-x} dx = -\sin(x) e^{-x} + \int \cos(x) e^{-x} dx$$

und das Problem ist noch nicht gelöst. Die weitere partielle Integration des neuen Integrales führt dann auf

$$(2) \quad \int \cos(x) \cdot e^{-x} dx = \\ = -\cos(x) e^{-x} - \int \sin(x) e^{-x} dx = -\cos(x) e^{-x} - I .$$

Das Einsetzen von (2) in (1) ergibt

$$I = \int \sin(x) \cdot e^{-x} dx = -\sin(x) e^{-x} - \cos(x) e^{-x} - I$$

und nun kann nach dem gesuchten Integral aufgelöst werden:

$$I = \int \sin(x) \cdot e^{-x} dx = -\frac{e^{-x}}{2} [\sin(x) + \cos(x)] .$$

3.3. Integration rationaler Funktionen

Gegeben sei die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} , \quad (\text{Glg. 3.3})$$

mit dem Zählerpolynom $g(x)$ und dem Nennerpolynom $h(x)$. Ist der Grad des Zählerpolynoms größer oder gleich dem des Nennerpolynoms, also $n \geq m$, dann muss die Polynomdivision durchgeführt werden, um einen echt gebrochenen Anteil zu erhalten:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = u(x) + \frac{v(x)}{h(x)} . \quad (\text{Glg. 3.4})$$

Während $u(x)$ meist elementar integriert werden kann ist für $v(x)/h(x)$ oft die Partialbruchzerlegung (PBZ) nötig.

3.3.1. Partialbruchzerlegung für einfach-reelle Polstellen

Enthält $h(x)$ ausschließlich k einfach-reelle Nullstellen (Pole), so kann wie folgt faktorisiert werden:

$$h(x) = B_k \cdot (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) \quad (\text{Glg. 3.5})$$

und der Ansatz für die PBZ lautet:

$$\frac{v(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_k}{x - x_k} . \quad (\text{Glg. 3.6})$$

Die Berechnung der A_i mit $i=1, \dots, k$ erfolgt nach Multiplikation mit $h(x)$ durch Koeffizientenvergleich der linken und rechten Seite.

Beispiel: Es soll das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x}{x^2 + x - 2} dx$$

berechnet werden; es ist

$$g(x) = x \quad , \quad h(x) = x^2 + x - 2$$

und $h(x)$ hat die beiden reellen Nullstellen $x_1=-2$, $x_2=1$. Damit lautet der Ansatz für die PBZ

$$\frac{x}{(x+2)(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-1}$$

und nach der Multiplikation mit $h(x)$

$$x = A_1(x-1) + A_2(x+2) = (A_1 + A_2)x + (-A_1 + 2A_2)x^0 \quad .$$

Nun kann der Koeffizientenvergleich der linken mit der rechten Seite erfolgen; man erhält das Gleichungssystem

$$x^1 : \quad 1 = A_1 + A_2 \quad ,$$

$$x^0 : \quad 0 = -A_1 + 2A_2 \quad .$$

Hieraus folgt schließlich mit den Lösungen $A_1=2/3$ und $A_2=1/3$ für das zu lösende Integral

$$\int \frac{x}{x^2 + x - 2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} = \frac{2}{3} \ln |x+2| + \frac{1}{3} \ln |x-1| \quad .$$

3.3.2. Partialbruchzerlegung für mehrfach-reelle Polstellen

Enthält $h(x)$ mehrfach-reelle Nullstellen (Pole) x_q , von der Vielfachheit w , so gilt die Faktorisierung

$$h(x) = \zeta_w \cdot (x - x_q)^w \quad (\text{Glg. 3.7})$$

und der Ansatz für die PBZ lautet:

$$\frac{v(x)}{h(x)} = \dots + \frac{B_w}{(x - x_q)^w} + \frac{B_{w-1}}{(x - x_q)^{w-1}} + \dots + \frac{B_1}{x - x_q} \quad . \quad (\text{Glg. 3.8})$$

Beispiel: Es soll das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2 + x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$$

berechnet werden; es ist

$$g(x) = x^2 + x, \quad h(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$$

und $h(x)$ hat die dreifach-reelle Nullstelle $x_1=2$. Damit lautet der Ansatz für die PBZ

$$\frac{x(x+1)}{(x-2)^3} = \frac{B_3}{(x-2)^3} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{x-2}$$

und nach der Multiplikation mit $h(x)$

$$\begin{aligned} x^2 + x &= B_3 + B_2(x-2) + B_1(x-2)^2 = \\ &= B_3 + B_2(x-2) + B_1(x^2 - 4x + 4) = \\ &= B_1x^2 + (B_2 - 4B_1)x + (B_3 - 2B_2 + 4B_1)x^0 \end{aligned}$$

Nun kann der Koeffizientenvergleich der linken mit der rechten Seite erfolgen; man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2: \quad 1 &= B_1, \\ x^1: \quad 1 &= B_2 - 4B_1, \\ x^0: \quad 0 &= B_3 - 2B_2 + 4B_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt schließlich mit den Lösungen $B_1=1$, $B_2=5$ und $B_3=6$ für das zu lösende Integral

$$\begin{aligned} 6 \int \frac{dx}{(x-2)^3} + 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2} + \int \frac{dx}{x-2} &= \\ &= -\frac{3}{(x-2)^2} - \frac{5}{(x-2)} + \ln|x-2|. \end{aligned}$$

3.3.3. Partialbruchzerlegung für konjugiert-komplexe Polstellen

Enthält $h(x)$ konjugiert-komplexe Nullstellen (Pole) $x_c + jy_c$, so gilt die Faktorisierung

(Glg. 3.9)

$$h(x) = \dots(x - x_c - jy_c)(x - x_c + jy_c)\dots = \dots((x - x_c)^2 + y_c^2)\dots$$

und der Ansatz für die PBZ lautet:

$$\frac{v(x)}{h(x)} = \dots + \frac{Cx + D}{(x - x_c)^2 + y_c^2} + \dots \quad (\text{Glg. 3.10})$$

Die hierbei nach der PBZ auftretenden Integrale erfordern die Anwendung der Substitutionsmethode, die in den nachfolgenden Kapiteln besprochen werden soll.

3.3.4. Integrale vom Typ $x^2 + a^2$

Das Integral vom Typ

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}, \quad a \neq 0 \quad (\text{Glg. 3.11})$$

führt auf die Funktion $\arctan(x)$, da gilt

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (\text{Glg. 3.12})$$

Die Lösung kann mittels einer geeigneten Substitution erfolgen. Diese ist so zu wählen, dass im Grunde (Glg.3.12) zu integrieren ist. Dazu muss (Glg.3.11) elementar umgeformt werden:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x/a)^2 + 1}$$

und die Substitution drängt sich förmlich auf; wir setzen

$$u = x/a, \quad du/dx = 1/a \rightarrow dx = a du$$

und erhalten

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{a du}{u^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan(u) = \frac{1}{a} \arctan(x/a).$$

Beispiel: Es soll das unbestimmte Integral (Nenner von (Glg.3.10))

$$\int \frac{dx}{(x - x_c)^2 + y_c^2}$$

berechnet werden; man erhält

$$\int \frac{dx}{(x - x_c)^2 + y_c^2} = \frac{1}{y_c^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x - x_c}{y_c}\right)^2 + 1}$$

und mit der Substitution

$$u = \frac{x - x_c}{y_c} \rightarrow du/dx = 1/y_c \quad dx = y_c du,$$

schließlich das Ergebnis

$$\frac{1}{y_c^2} \int \frac{y_c du}{u^2 + 1} = \frac{1}{y_c} \arctan(u) = \frac{1}{y_c} \arctan\left(\frac{x - x_c}{y_c}\right) .$$

3.3.5. Integrale vom Typ $ax^2 + bx + c$

Das Integral vom Typ

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{Glg. 3.13})$$

kann nur durch Fallunterscheidung gelöst werden, denn je nach Art der Polstellen gibt es zwei mögliche Fälle.

1. Fall: $D = b^2 - 4ac = 0$, es liegt eine doppelte Nullstelle des Nenners bei

$$x_{1/2} = -b/2a \quad , \quad a \neq 0$$

vor. Damit kann der Nennerterm wie folgt dargestellt werden

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

und es liegt die Substitution

$$u = x + \frac{b}{2a} \quad , \quad du/dx = 1 \quad \rightarrow \quad dx = du$$

nahe; für das Integral gilt dann schließlich

$$\frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{a} \frac{1}{x + \frac{b}{2a}} = \frac{-2}{2ax + b} .$$

2. Fall: $D = b^2 - 4ac \neq 0$, d.h. der Nenner hat zwei reelle ($D > 0$) oder zwei konjugiert-komplexe Nullstellen ($D < 0$)

$$x_{1/2} = -b/2a \pm \sqrt{b^2 - 4ac}/2a \quad , \quad a \neq 0 .$$

Damit kann der Nennerterm nach quadratischer Ergänzung wie folgt dargestellt werden

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + d^2\right) \quad , \quad d^2 = -\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} . \end{aligned}$$

Bevor die Substitution durchgeführt werden kann, wird noch die folgende Umformung des Nennerterms vorgenommen

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + d^2 \right) = a d^2 \left(\left(\frac{2ax + b}{2ad} \right)^2 + 1 \right)$$

und die sinnvolle Substitution lautet

$$u = \frac{2ax + b}{2ad} \quad , \quad du/dx = 1/d \quad \rightarrow \quad dx = d \cdot du \quad .$$

Damit gilt für das Integral

$$\frac{1}{a d^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{2ax+b}{2ad} \right)^2 + 1} = \frac{1}{a d} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{a d} \arctan(u)$$

und nach Rücksubstitution

$$\int \frac{dx}{a x^2 + b x + c} = \frac{1}{a \cdot \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}} \cdot \arctan \left[\frac{2ax + b}{2a \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}} \right] .$$

3.3.6. Beispiele

Beispiel 1: Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x^2}{3x^2 + 3} dx \quad .$$

Im ersten Schritt ist die Polynomdivision durchzuführen, da $n=m=2$ ist; man erhält:

$$\begin{array}{r} x^2 \quad : (3x^2 + 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3x^2 + 3} \\ \underline{x^2 + 1} \\ 0 - 1 \end{array}$$

Jetzt kann die Integration durchgeführt werden:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{3x^2 + 3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 dx - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \left[\frac{x}{3} - \frac{\arctan(x)}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{12} \quad .$$

Beispiel 2: Man berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x} dx \quad .$$

Auch hier muss im ersten Schritt die Polynomdivision durchgeführt werden, da $n > m = 2$ ist; man erhält:

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 + x - 1) : (x^2 + x) = x - 2 + \frac{3x - 1}{x(x + 1)} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ 0 - 2x^2 \\ \underline{- 2x^2 - 2x} \\ 0 + 3x - 1 \end{array}$$

und erkennt, dass der Restbruch mittels PBZ zerlegt werden muss; der Ansatz lautet

$$\frac{3x - 1}{x(x + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x + 1} \quad ,$$

da es sich um zwei einfach-reelle Polstellen handelt. Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert

$$3x - 1 = A_1(x + 1) + A_2 x = (A_1 + A_2)x + (A_1) x^0 \quad .$$

Im Rahmen des Koeffizientenvergleiches folgen für $A_1 = -1$ und für $A_2 = 4$, so dass das Integral jetzt gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x} dx &= \int x dx - 2 \int dx - \int \frac{dx}{x} + 4 \int \frac{dx}{x + 1} = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \ln |x| + 4 \ln |x + 1| \quad . \end{aligned}$$

3.4. Aufgaben

1.) Berechnen Sie

$$A = \int_0^1 \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 2x + 5} dx \ .$$

Ergebnis: $A = 0,183 \ .$

2.) Berechnen Sie

$$B = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2x^2 + 2} dx \ .$$

Ergebnis: $B = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \approx 0,119 \ .$

3.) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$I = \int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + x} \ .$$

Ergebnis:

$$I = \frac{1}{1+x} + \ln|x| - \ln|1+x| \ .$$

4. Laplace-Transformation

4.1. Überblick

Mithilfe des Fourierintegrals

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{Glg. 4.1})$$

kann unter der Konvergenzbedingung (Schranke M)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < M < \infty$$

für die Funktion $f(t)$ deren Spektrum $F(j\omega)$ berechnet werden. Leider ist diese Bedingung für bereits für einfache und praktisch wichtige Zeitfunktionen nicht erfüllt. Für Zeitfunktionen $f(t)$, die für $t < 0$ identisch Null sind, können die Konvergenzschwierigkeiten jedoch häufig behoben werden, wenn man zunächst die Funktion $f(t)$ mit $e^{-\sigma t}$ ($\sigma > 0$) multipliziert, die Fouriertransformation für $f(t) e^{-\sigma t}$ durchführt und dann $\sigma \rightarrow 0$ streben lässt.

Die Laplace-Transformation wird durch die Abbildung

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad p = \sigma + j\omega \quad (\text{Glg. 4.2})$$

definiert und eignet sich zur Lösung von Differenzialgleichungen und zur Berechnung von Einschaltvorgängen, bzw. Anfangswertaufgaben. Das Laplace-Integral enthält die komplexe Kreisfrequenz p und man schreibt auch hier die Korrespondenz

$$f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(p) \quad . \quad (\text{Glg. 4.3})$$

Ein wichtiger Vorteil gegenüber der konventionellen Lösung von DGLs ist, dass die Transformation nach (Glg. 4.2) in den Bildbereich, sowie die Rücktransformation in den Originalraum meistens nicht durch Integration erfolgen muss. Vielmehr kommen Tabellen zum Einsatz, auf deren Elemente die meisten zu transformierenden Original- oder Bildfunktionen abgebildet werden können.

4.2. Wichtige Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Die nachfolgende Tabelle enthält die für die Anwendung in der Elektrotechnik wesentlichen Korrespondenzen.

$f(t) = LT^{-1}[F(p)] \quad , \quad t \geq 0$		$F(p) = LT[f(t)]$
1.)	1	$\frac{1}{p}$
2.)	t	$\frac{1}{p^2}$
3.)	$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{p^{k+1}}$
4.)	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
5.)	$t e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p - \alpha)^2}$
6.)	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
7.)	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
8.)	$\cos(\omega_0 t) e^{\alpha t}$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega_0^2}$
9.)	$\sin(\omega_0 t) e^{\alpha t}$	$\frac{\omega_0}{(p - \alpha)^2 + \omega_0^2}$
10.)	$\cosh(\alpha t)$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$
11.)	$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$

Grundsätzlich ist der Definitionsbereich für $f(t)$ zu beachten, da $f(t < 0) = 0$ gelten muss.

4.3. Wichtige Sätze der Laplace-Transformation

Nachfolgend werden einige wichtige Sätze der Laplace-Transformation aufgeführt, die zur Lösung von Anfangswertaufgaben benötigt werden.

4.3.1. Linearität

Die LT ist eine lineare Operation, es gilt

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p) \quad . \quad (\text{Glg. 4.4})$$

4.3.2. Faltungssatz

Für das Faltungsintegral zweier Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ gilt

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad .$$

Die Faltung stellt eine der wichtigsten Operationen in der Systemtheorie und der Regelungstechnik dar, da bei Kenntnis der Impulsantwort $h(t)$ die Systemreaktion $y(t)$ auf eine beliebige (deterministische) Erregung $x(t)$ berechnet werden kann

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad .$$

Aus diesem Grund spielt der Faltungssatz der LT für die Anwendung in der Technik eine herausragende Rolle; es gilt

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad Y(p) = H(p) \cdot X(p) \quad . \quad (\text{Glg. 4.5})$$

4.3.3. Verschiebungssatz (Dämpfung)

Wie man leicht nachrechnen kann gilt

$$f(t) \cdot e^{p_0 t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(p - p_0) \quad (\text{Glg. 4.6})$$

und

$$f(t - t_0) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(p) \cdot e^{-p t_0} \quad . \quad (\text{Glg. 4.7})$$

4.3.4. Differenziationssatz

Für die erste Ableitung einer Zeitfunktion gilt

$$df(t)/dt \quad \circ \text{---} \bullet \quad p F(p) - f(0) \quad ; \quad (\text{Glg. 4.8})$$

sie enthält die Anfangsbedingung $f(0)$. Ist die Zeitfunktion n -mal differenzierbar, dann gilt

$$d^n f(t)/dt^n \quad \circ \text{---} \bullet \quad (\text{Glg. 4.9})$$

$$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad .$$

4.4. Beispiele

Beispiel 1: Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = t \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad .$$

Die LT liefert die algebraische Gleichung

$$p Y(p) - y(0) + 2Y(p) = \frac{1}{p^2} \quad ,$$

aus der unter der Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(0)=0$ das Bild der gesuchten Lösung ermittelt werden kann; es gilt

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 (p + 2)} \quad .$$

Zur Rücktransformation muss der Ausdruck durch Partialbruchzerlegung in elementare, d.h. mit der Tabelle zurücktransformierbare, Terme umgeformt werden. $Y(p)$ hat eine doppelt-reelle Polstelle $p=0$ und einen einfach-reellen Pol $p=-2$; daher lautet der Ansatz für die PBZ

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 (p + 2)} = \frac{A_1}{p + 2} + \frac{B_1}{p^2} + \frac{B_2}{p}$$

und nach Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner erhält man

$$1 = A_1 p^2 + B_1 (p + 2) + B_2 (p + 2)p =$$

$$= (A_1 + B_2) p^2 + (B_1 + 2B_2) p + (2B_1) p^0 \quad .$$

Der Koeffizientenvergleich beider Gleichungsseiten liefert $A_1=1/4$, $B_1=1/2$ und $B_2=-1/4$; damit liegt $Y(p)$ in der nachfolgenden, rücktransformierbaren Form vor:

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 (p + 2)} = \frac{1}{4} \frac{1}{p + 2} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{p} \quad .$$

Die Rücktransformation mit den Korrespondenzen [1], [2] und [4] liefert die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{4} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{4} \quad , \quad t \geq 0 \quad .$$

Beispiel 2: Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = 3 \cos(\sqrt{2} t) \quad , \quad \dot{y}(0) = y(0) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad .$$

Die LT liefert unter Berücksichtigung der beiden Anfangsbedingungen die algebraische Gleichung

$$p^2 Y(p) - p Y(p) - 2Y(p) = 3 \frac{p}{p^2 + 2}$$

und hieraus

$$Y(p) = 3 \frac{p}{(p^2 - p - 2)(p^2 + 2)} \quad .$$

Zur Rücktransformation muss wiederum die PBZ durchgeführt werden. Der Nenner enthält zwei Faktoren, die gesondert betrachtet werden können; für

$$p^2 + 2$$

liegen zwei konjugiert-komplexe Pole $p_{\infty 1/2} = \pm j\sqrt{2}$ vor, d.h. es bietet sich für diesen Term der reelle Ansatz

$$\frac{Cp + D}{p^2 + 2}$$

an. Der zweite Faktor hat die einfach-reellen Nullstellen

$$p_{\infty 3/4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \quad ,$$

also $p_{\infty 3} = -1$ und $p_{\infty 4} = 2$; damit lautet der Gesamtansatz für die PBZ

$$Y(p) = \frac{3p}{(p+1)(p-2)(p^2+2)} = \frac{A_1}{p+1} + \frac{A_2}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+2} \quad .$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$3p = A_1(p-2)(p^2+2) + A_2(p+1)(p^2+2) + Cp + D(p+1)(p-2)$$

und einigen Umformungen

$$3p = (A_1 + A_2 + C)p^3 - (-2A_1 + A_2 - C + D)p^2 + \\ + (2A_1 + 2A_2 - 2C - D)p + (-4A_1 + 2A_2 - 2D)p^0$$

kann der Koeffizientenvergleich durchgeführt werden. Nach etwas längerer Rechnung erhält man für die gesuchten Koeffizienten

$$A_1 = A_2 = 1/3 \quad , \quad C = -2/3 \quad , \quad D = -1/3 \quad .$$

Die PBZ von $Y(p)$ sieht dann aus wie folgt

$$Y(p) = \frac{3p}{(p+1)(p-2)(p^2+2)} = \frac{1/3}{p+1} + \frac{1/3}{p-2} + \frac{-\frac{2}{3}p - \frac{1}{3}}{p^2+2}$$

und kann so noch nicht vollständig mithilfe der Tabelle zurücktransformiert werden. Der letzte Bruch muss noch durch Aufteilen in zwei Teilbrüche und Erweiterung des Zweiten mit $\sqrt{2}$ wie folgt angepasst werden:

$$Y(p) = \frac{1/3}{p+1} + \frac{1/3}{p-2} - \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+2} - \frac{1}{3} \frac{1}{p^2+2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad .$$

Nun kann die Rücktransformation in den Originalraum gliedweise durchgeführt werden; man erhält mit den Korrespondenzen [4], [6] und [7] die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{2}{3} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin(\sqrt{2}t) \quad , \quad t \geq 0 \quad .$$

4.5. Aufgaben

1.) Berechnen Sie $y(t)$ aus

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2 \sin(4t) \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad .$$

$$\text{Ergebnis: } y(t) = -\frac{1}{12} e^{-4t} + \frac{8}{51} e^{-t} - \frac{5}{68} \cos(4t) - \frac{3}{68} \sin(4t) \quad .$$

2.) Berechnen Sie $y(t)$ aus

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4y(t) = \frac{1}{2} \cos(3t) \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad .$$

$$\text{Ergebnis: } y(t) = \frac{1}{10} \cos(2t) - \frac{1}{10} \cos(3t) \quad .$$

Teil (II): Elektrotechnik

1. Zweipoltheorie im Gleichstromkreis

Mit der Zweipoltheorie können elektrische Netzwerke z.T. stark vereinfacht werden. Daher spielt sie bei der Modellierung von elektrischen Netzwerken eine wichtige Rolle.

1.1. Unabhängige Quellen

Der elektrische Strom in einem Netzwerk ist auf die Wirkung einer Spannung, die die beweglichen Ladungsträger entlang des elektrischen Feldes beschleunigt, zurückzuführen. Aus diesem Grund sind alle elektrischen Energiequellen von der Physik her als Spannungsquellen zu betrachten. In der Anwendung in der Elektrotechnik wird der Begriff der **Spannungsquelle** noch um die Unabhängigkeit vom Lastwiderstand erweitert.

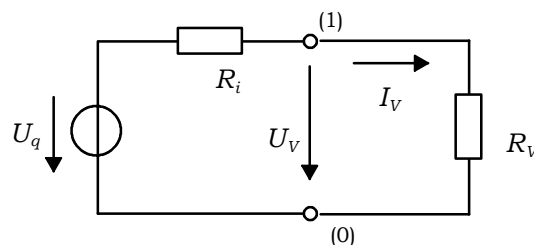


Bild 1.1: Zur Spannungs-/Stromquelle

Aus (Bild 1.1) erhält man für die Verbraucherspannung mit der Spannungsteilerregel

$$U_V = U_q \cdot \frac{R_V}{R_V + R_i} = U_q \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_V}}$$

und man sieht, dass für $R_V \gg R_i$ die Verbraucherspannung ungefähr gleich der Quellspannung ist

$$U_V \approx U_q \quad . \quad (\text{Glg. 1.1})$$

Diese Näherung gilt für einen weiten Bereich des Lastwiderstandes, sofern dieser nur sehr viel größer als der Innenwiderstand ist; man spricht von einer Spannungsquelle, die dem Verbraucher die Quellspannung U_q einprägt.

Abhängig von der Aufgabenstellung ist es manchmal nützlich, anstelle mit einer Spannungsquelle mit dem Modell einer **Stromquelle** zu arbeiten. Physikalisch gesehen ist eine Stromquelle auch wieder eine Spannungsquelle mit der Eigenschaft, dass der von ihr abgegebene *Strom weitgehend unabhängig vom Lastwiderstand ist*. Die Einführung von Stromquellen kann zu Rechenvereinfachungen führen. Berechnet man in der Schaltung (Bild 1.1) den Verbraucherstrom

$$I_V = \frac{U_q}{R_i + R_V} = \frac{U_q}{R_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_V}{R_i}}$$

so kann man für $R_V \ll R_i$ in guter Näherung von einer konstanten (eingepprägten) Einströmung

$$I_V \approx \frac{U_q}{R_i} = I_q \quad (\text{Glg. 1.2})$$

sprechen. Für die Betriebsfälle als Stromquelle wird ein anderes Ersatzschaltbild (Bild 1.2) verwendet.

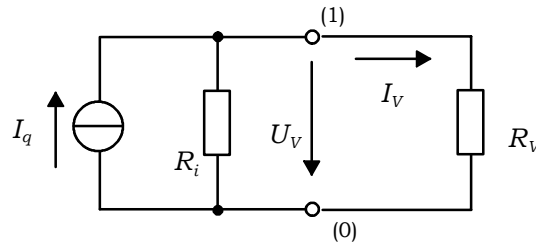


Bild 1.2: Modell der Stromquelle

In der Energietechnik wird man überwiegend mit Spannungsquellen rechnen, da die Konstanz der Netzspannung unabhängig von der Last eine große Forderung ist. In Schaltungen der Daten- und Informationstechnik ist es abhängig von der betrachteten Anwendung notwendig zwischen den beiden Modellen Spannungs- und Stromquelle zu wählen.

1.2. Das Überlagerungsgesetz

Mit dem **Überlagerungssatz** nach Helmholtz können Netzwerke vereinfacht und berechnet werden. Der Überlagerungssatz ist bei allen *linearen* Systemen in der Natur anwendbar. Zur Einführung dieser Methode wird das Netzwerk nach (Bild 1.3)

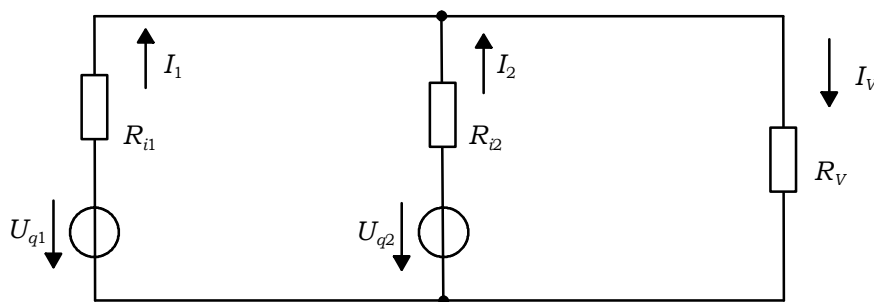


Bild 1.3: Beispiel zur Einführung des Überlagerungssatzes

zunächst einmal nur umgezeichnet (Bild 1.4). Es ist sofort einsichtig, dass jede der beiden Quellen einen Beitrag zum Verbraucherstrom I_V liefern muss. Ziel der Überlagerungsmethode ist es nun, sowohl diesen Beitrag, als auch den Gesamtstrom zu bestimmen.

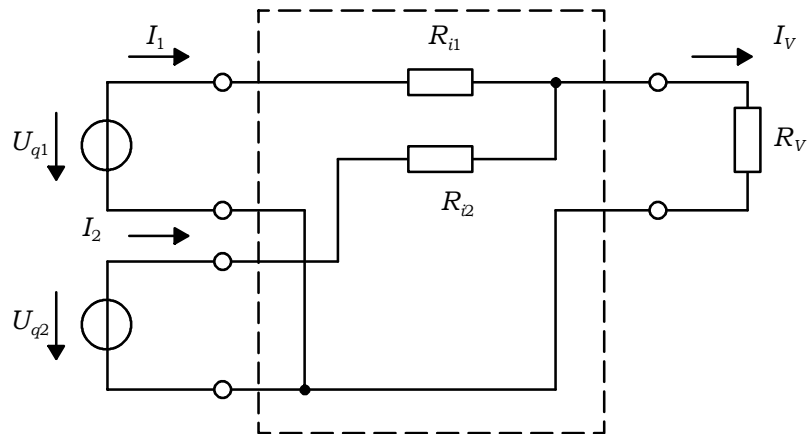


Bild 1.4: Umgezeichnetes Netzwerk

Vorher soll allerdings der Überlagerungssatz allgemein betrachtet werden. Jedes beliebige Netzwerk kann in eine Form des Beispiels (Bild 1.4) umgeformt werden, so dass allgemein (Bild 1.5) gilt. Das Netzwerk wird durch n Spannungsquellen U_{q1} bis U_{qn} und m Stromquellen I_{q1} bis I_{qm} erregt, die alle zum Verbraucherstrom beitragen.

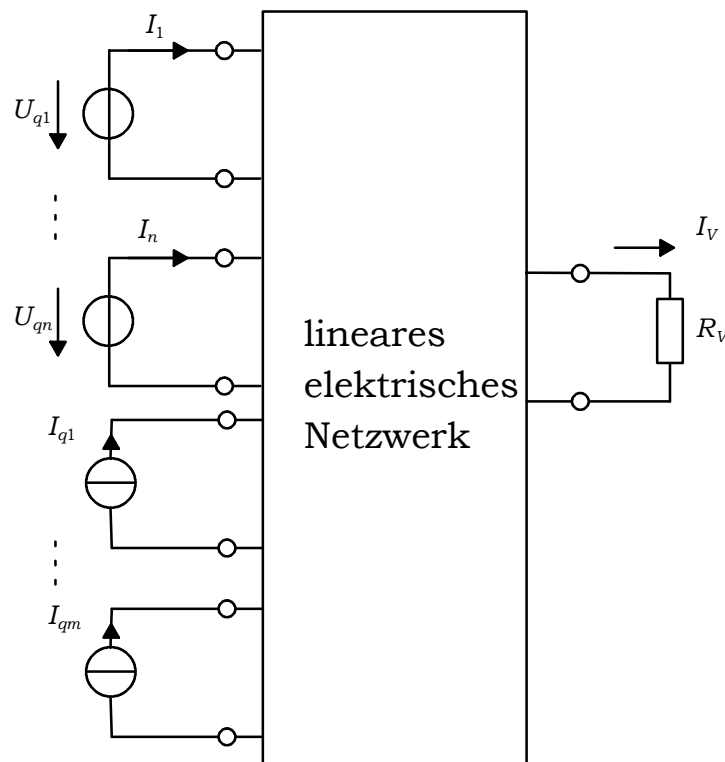


Bild 1.5: Allgemeine Darstellung eines linearen Netzwerks

Wendet man den Überlagerungssatz auf elektrische Netzwerke mit beliebig vielen Quellen (Bild 1.5) an, so können die Zweigströme des Netzwerkes durch Addition der jeweils nur von einer Quelle allein hervorge-

rufenen Teilströme berechnet werden Für die Anwendung müssen allerdings wichtige Forderungen erfüllt sein:

- 1.) Das Netzwerk muss aus linearen Schaltungselementen aufgebaut sein, d.h. Strom und Spannung werden über das Ohmsche Gesetz linear miteinander verknüpft.
- 2.) Die im Netzwerk vorhandenen Energiequellen müssen voneinander linear unabhängig sein.

Überlagerungsmethode

Wenn die beiden Forderungen durch das vorliegende Netzwerk erfüllt sind, überlagern sich die von den Quellen verursachten Teilströme ohne gegenseitige Störung nach dem folgenden Algorithmus:

- 1.) Alle Quellen, bis auf eine, werden als energetisch nicht vorhanden betrachtet. Dabei sind
 - a.) ideale Spannungsquellen durch einen „gedachten“ Kurzschluss und
 - b.) ideale Stromquellen durch einen Leerlauf (offene Verbindung) zu ersetzen!
- 2.) Der Reihe nach werden nun alle Quellen als energiemäßig wirksam angesehen und die Teilströme berechnet.
- 3.) Alle Teilströme werden vorzeichenrichtig zum Gesamtstrom addiert.

Achtung: Die als energiemäßig nicht wirksam gedachten Quellen behalten ihren Innenwiderstand bei der Berechnung bei. Es handelt sich dabei um den Übergang vom aktiven in einen passiven Zweipol.

Beispiel: In der Schaltung (Bild 1.3) soll der Verbraucherstrom I_V mit dem Überlagerungsgesetz berechnet werden. Es werden die Teilströme I_V' und I_V'' getrennt voneinander berechnet und danach zum Gesamtstrom I_V überlagert.

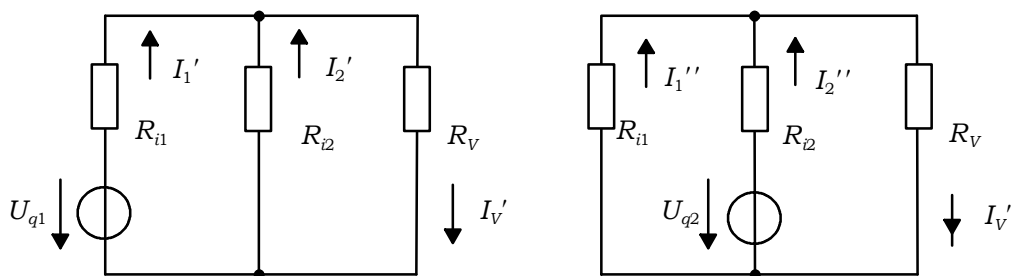


Bild 1.6: Anwendung des Überlagerungssatzes

1.) Nur U_{q1} ist wirksam:

Zur Berechnung von I_V' soll zunächst der Gesamtwiderstand berechnet werden

$$R_{ges} = R_{i1} + \frac{R_{i2} R_V}{R_{i2} + R_V} \quad ,$$

damit wird der Gesamtstrom I_1' im ersten Fall

$$I_1' = \frac{U_{q1}}{R_{ges}} = \frac{U_{q1} (R_{i2} + R_V)}{R_{i2} R_V + R_{i1} R_V + R_{i1} R_{i2}}$$

und mithilfe der Stromteiler-Regel berechnet sich I_V' zu

$$I_V' = I_1' \frac{R_{i2}}{R_{i2} + R_V} = \frac{U_{q1} R_{i2}}{R_{i2} R_V + R_{i1} R_V + R_{i1} R_{i2}} \quad .$$

2.) Nur U_{q2} ist wirksam:

Die Berechnung von I_V'' erfolgt analog wie oben. Zunächst wird also der nun resultierende Gesamtwiderstand bestimmt zu

$$R_{ges} = R_{i2} + \frac{R_{i1} R_V}{R_{i1} + R_V} \quad ,$$

damit wird der Gesamtstrom I_2''

$$I_2'' = \frac{U_{q2}}{R_{ges}} = \frac{U_{q2} (R_{i1} + R_V)}{R_{i2} R_V + R_{i1} R_V + R_{i1} R_{i2}} \quad ,$$

und den zweiten Teilstrom I_V'' nach der Stromteiler-Regel zu

$$I_V'' = I_2'' \frac{R_{i1}}{R_{i1} + R_V} = \frac{U_{q2} R_{i1}}{R_{i2} R_V + R_{i1} R_V + R_{i1} R_{i2}} \quad .$$

Zur Berechnung des Verbraucherstromes I_V müssen nun beide Teilergebnisse überlagert - vorzeichenrichtig addiert - werden; man erhält wie erwartet

$$I_V = I_V' + I_V'' = \frac{U_{q1} R_{i2} + U_{q2} R_{i1}}{R_V R_{i1} + R_{i1} R_{i2} + R_V R_{i2}} \quad .$$

Anmerkung: Hätte man die Zählpfeilrichtungen für die Ströme I_1 und I_2 anders gewählt, so wäre bei der Anwendung des Überlagerungssatzes jeweils die vorzeichenrichtige Addition zu beachten gewesen.

Zusammenfassung

Die Anwendung des Überlagerungssatzes ist dann von Vorteil, wenn

- 1.) nur ein Teilstrom gesucht ist und
- 2.) die Berechnung der Teilströme mit geringem Aufwand möglich ist.

Nichtlineare Netzwerke können nicht mit der Überlagerungsmethode berechnet werden. Zwar sind die Gleichungen mithilfe der Kirchhoffschen Sätze aufstellbar, jedoch ist die Lösung mathematisch sehr aufwendig und meistens nur durch Anwendung numerischer Verfahren erhältlich.

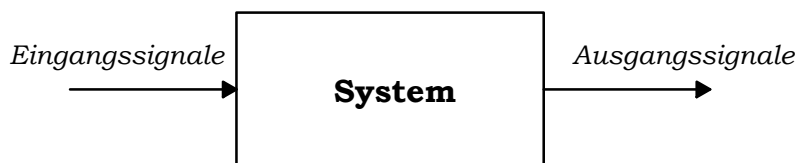


Bild 1.7: Zum Überlagerungssatz

Ein durch ein Eingangssignal $x(t)$ angeregtes System antwortet mit der für die Anregung spezifischen Systemreaktion $y(t)$. Jedes technische System ist somit eindeutig charakterisierbar. Wirken mehrere Eingangssignale $x_i(t)$ auf das System ein, wird die resultierende Antwort sich aus einer Überlagerung der Einzelantworten y_i auf die Einzelsignale x_i ergeben, sofern das System linear ist, man schreibt die Abbildung

$$x(t) = \sum x_i(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = \sum y_i(t) \quad . \quad (\text{Glg. 1.3})$$

1.3. Ersatzquellen

1.3.1. Methode der Ersatzspannungsquelle

Ein beliebiges passives oder aktives Netzwerk kann zwischen zwei Klemmen immer durch das Modell einer *Ersatzspannungsquelle* durch die Angabe von Klemmenspannung, bzw. Quellenspannung U_q (widerstandslose idealisierte Spannungsquelle) und dem Innenwiderstand R_i vollständig beschrieben und damit teilweise erheblich vereinfacht werden. Wie bei der Berechnung mit dem Überlagerungsgesetz müssen auch bei der Methode der Ersatzspannungsquelle ausschließlich lineare Schaltungselemente vorliegen.

1.) Schaltungen mit einer Quelle

Das Prinzip der Ersatzspannungsquelle soll anhand eines Beispiels (Bild 1.8) erläutert werden.

- a.) Das Bild zeigt eine Schaltung mit einer Quelle im Leerlauf, d.h. der Abschlusswiderstand R_{10} ist unendlich groß.

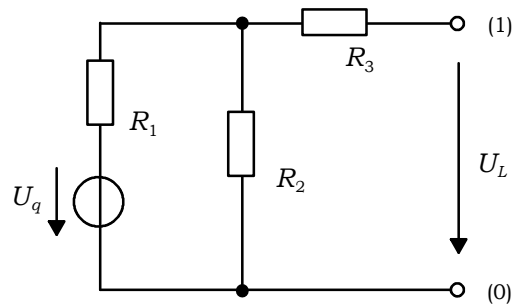


Bild 1.8: Zur Ersatzspannungsquelle

Die Leerlaufspannung U_L berechnet sich zu

$$U_L = U_q \frac{R_2}{R_1 + R_2} ,$$

da der Widerstand R_3 im Leerlauf stromlos ist.

- b.) Durch Herausnehmen und Überbrücken der Quellen-
spannung (Bild 1.9) entsteht ein passiver Zweipol, dessen
Innenwiderstand bestimmt werden kann.

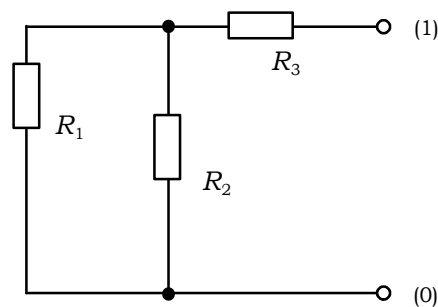


Bild 1.9: Übergang zum passiven Zweipol

Der Innenwiderstand berechnet sich nun zu

$$R_i = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_3 R_1 + R_3 R_2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

- c.) Bei Kurzschluss der Klemmen (1) und (0) fließt der Kurz-
schlussstrom I_K .

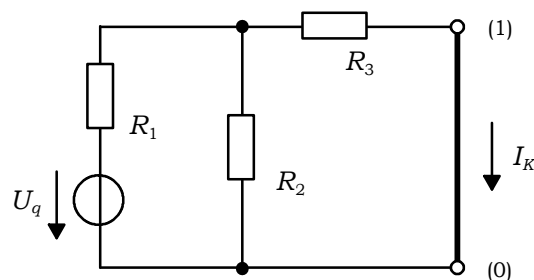


Bild 1.10: Bestimmung des Kurzschlussstromes

Der Kurzschlussstrom I_k berechnet sich aus dem Gesamtstrom

$$I_{ges} = \frac{U_q}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

durch Anwendung der Stromteilerregel zu

$$I_k = I_{ges} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{U_q R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} .$$

d.) Das ursprüngliche Netzwerk wird nun durch eine äquivalente Spannungsquelle ersetzt (Bild 1.11)

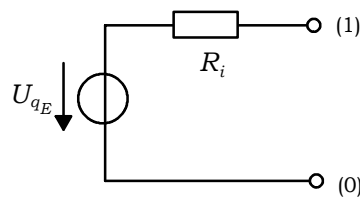


Bild 1.11: Äquivalente Spannungsquelle

Die Ersatzspannungsquelle wird durch die i.A. messbaren Größen Leerlaufspannung U_L , Kurzschlussstrom I_k (Vorsicht bei Kurzschlussmessung) und Innenwiderstand R_i vollständig beschrieben. Ferner gilt mit dem Ohmschen Gesetz für den Innenwiderstand

$$R_i = U_{qE}/I_k \quad , \quad U_{qE} = U_L \quad , \quad I_k = U_{qE}/R_i .$$

Damit ist die Kenntnis zweier Größen der Ersatzspannungsquelle bereits ausreichend, um die Quelle in ihrem elektrischen Verhalten eindeutig zu beschreiben. Die Äquivalenz der beiden Schaltungen beweist man beispielsweise durch die Berechnung des Verbraucherstromes I_V bei Belastung mit dem Widerstand R_V .

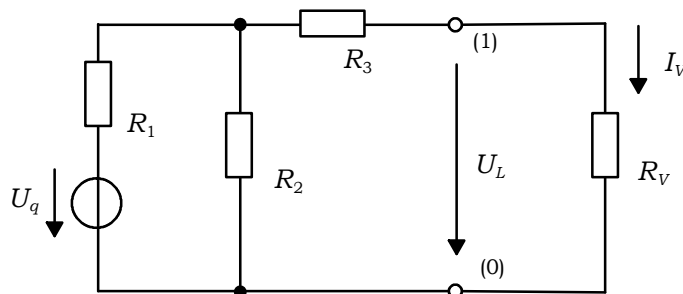


Bild 1.12: Ursprüngliches, belastetes Netzwerk

Der Verbraucherstrom lässt sich mit der Stromteilerregel aus dem Gesamtstrom I_{ges} berechnen:

$$I_V = I_{ges} \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_V} .$$

Den Gesamtstrom I_{ges} erhält man, wenn man die Quellenspannung durch den Ersatzwiderstand der Schaltung dividiert:

$$I_{ges} = \frac{U_q}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_V)}{R_2+R_3+R_V}} ,$$

damit kann der Verbraucherstrom I_V durch die Quellenspannung U_q und die Widerstände R_1 , R_2 , R_3 und R_V ausgedrückt werden:

$$I_V = \frac{U_q R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_V + R_2 R_V} .$$

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man die Ersatzspannungsquelle mit dem Widerstand R_V belastet (Bild 1.13).

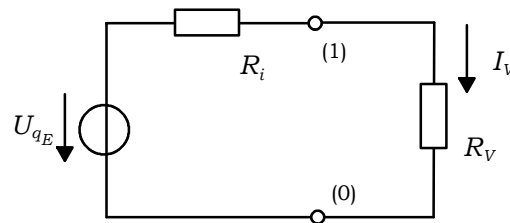


Bild 1.13: Belastete Ersatzspannungsquelle

Der Verbraucherstrom berechnet sich aus der Ersatzspannung U_{qE} und der Reihenschaltung der Widerstände R_i und R_V

$$I_V = \frac{U_{qE}}{R_i + R_V} .$$

Setzt man für U_{qE} und R_i die vorhin berechneten Größen der Ersatzspannungsquelle ein, ergibt sich der Strom I_V zu

$$I_V = \frac{U_q R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_V + R_2 R_V} ,$$

d.h. bezogen auf das Klemmenpaar (1)-(0) bewirkt die Belastung mit dem Lastwiderstand R_V , wie erwartet, denselben Strom I_V .

2.) Schaltungen mit mehreren Quellen

Für Schaltungen mit mehreren Quellen läßt sich durch Anwendung des Überlagerungssatzes ebenfalls eine Ersatzspannungsquelle mit nur einer Quelle und einem Innenwiderstand bestimmen. Ganz allgemein gilt:

- 1.) Die Quellenspannung der Ersatzspannungsquelle entspricht der Leerlaufspannung des tatsächlichen aktiven Zweipols:

$$U_{qE} = U_L .$$

- 2.) Der Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle entspricht dem Widerstand zwischen den betrachteten Klemmen des passiven Zweipols:

$$R_i = U_{qE}/I_k \quad .$$

Die beiden Größen U_{qE} und I_k sind messtechnisch leicht zu erfassen. Die Messung eines Kurzschlussstromes darf allerdings nur dann erfolgen, wenn sicher ist, dass der Innenwiderstand des Netzwerkes den Strom I_k begrenzt. Desweiteren müssen die Forderungen nach Linearität und Unabhängigkeit der Quellen für die Gültigkeit des Überlagerungssatzes erfüllt sein.

Beispiel: Bei der in (Bild 1.14) dargestellten Wheatstoneschen Messbrücke soll der Brückenstrom I_M in Abhängigkeit aller Widerstände und der Quellenspannung U_q berechnet werden.

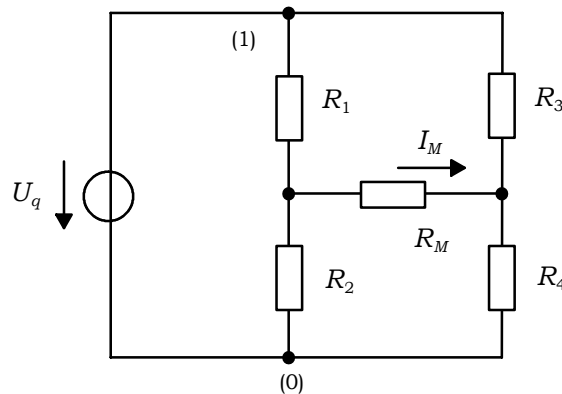


Bild 1.14: Wheatstonesche Messbrücke

Im ersten Schritt wird die Brückenschaltung nach (Bild 1.15) aufgetrennt. Die elektrischen Verhältnisse ändern sich nicht, wenn zur Spannungsquelle U_q eine gleich große Spannungsquelle parallel geschaltet wird. Dann kann am Knoten (1) aufgetrennt werden.

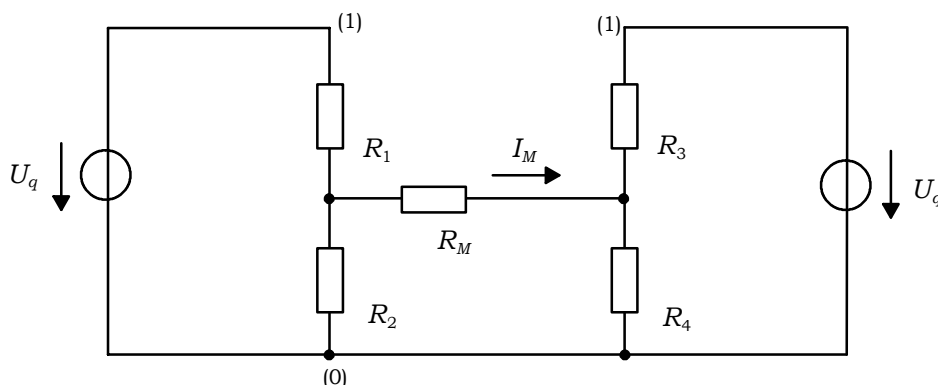


Bild 1.15: Auftrennen der Brückenschaltung

Die Brückenwiderstände werden nun den jeweiligen Quellen zugeordnet und die jeweilige Ersatzspannungsquelle bestimmt.

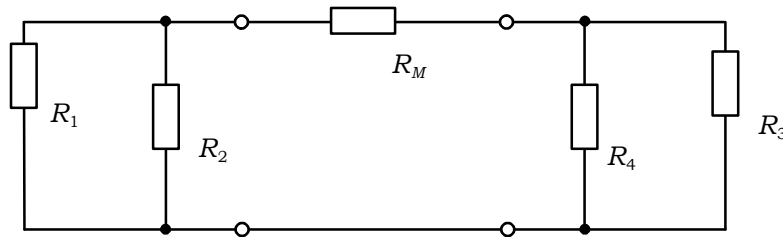


Bild 1.16: Zur Berechnung der Innenwiderstände

Die Innenwiderstände der beiden Ersatzspannungsquellen berechnen sich zu

$$R_{i_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_{i_2} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

und die jeweiligen Kurzschlussströme sind sofort aus dem Bild ersichtlich:

$$I_{k_1} = \frac{U_q}{R_1}, \quad I_{k_2} = \frac{U_q}{R_3}.$$

(Bild 1.17) zeigt die Ersatzschaltung der Brücke mit den beiden Ersatzspannungsquellen. Diese Schaltung wird nun mit dem Überlagerungssatz berechnet.

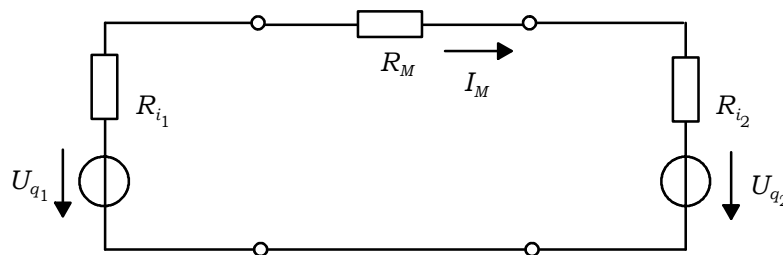


Bild 1.17: Ersatzschaltung mit Ersatzspannungsquellen

Nur die Quelle U_{q1} ist wirksam:

$$I_M' = \frac{U_{q1}}{R_{i_1} + R_M + R_{i_2}}.$$

Nur die Quelle U_{q2} ist wirksam:

$$I_M'' = - \frac{U_{q2}}{R_{i_1} + R_M + R_{i_2}}.$$

Setzt man die Werte für U_{q1} , U_{q2} , R_{i1} und R_{i2} ein erhält man nach einiger Rechnung:

$$I_M = U_q \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_M(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4(R_1 + R_2)} .$$

Bei Abgleich der Brücke ist $I_M=0$ und $R_1 R_4=R_2 R_3$.

Dem Betrachter stellt sich an dieser Stelle zwangsweise die Frage: Wo ist denn nun eigentlich die Vereinfachung durch die Ersatzspannungsquelle?

Diese kommt erst dann zur Geltung, wenn anstelle der doch umfangreichen Ausdrücke für U_{q1} , U_{q2} , R_{i1} und R_{i2} bei einer realen Schaltung nur noch die Zahlenwerte verwendet werden.

1.3.2. Modellierung mit der Ersatzstromquelle

Das wesentliche Merkmal einer Ersatzstromquelle ist, dass der Verbraucherstrom I_V über weite Bereiche näherungsweise unabhängig vom Lastwiderstand R_V ist. Das bedeutet, dass die Klemmenspannung nicht konstant bleibt.

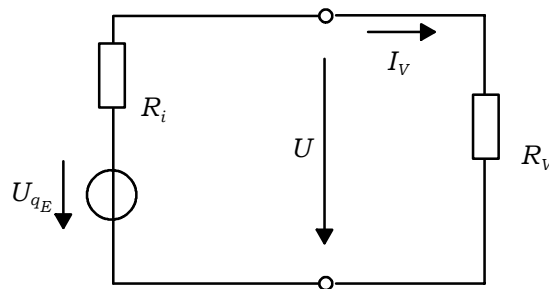


Bild 1.18: Ersatzspannungsquelle mit R_V belastet

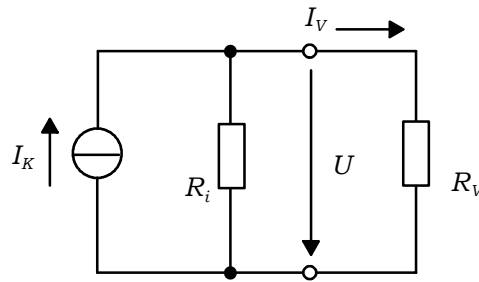
Die Ersatzspannungsquelle kann mit geringem Aufwand in ihre äquivalente Ersatzstromquelle umgerechnet werden. Die Klemmenspannung U lässt sich folgendermaßen angeben:

$$U = U_{qE} \frac{R_V}{R_i + R_V} \frac{R_i}{R_i} = \frac{U_{qE}}{R_i} \frac{R_V R_i}{R_V + R_i} .$$

Der Quotient U_{qE}/R_i entspricht dem Kurzschlussstrom I_k der Ersatzspannungsquelle und das Produkt $R_V R_i / (R_V + R_i)$ der Parallelschaltung der beiden Widerstände:

$$\frac{R_V R_i}{R_V + R_i} \Leftrightarrow R_i \parallel R_V .$$

Dieses Ergebnis kann nun so interpretiert werden, dass der konstante Kurzschlussstrom I_k die Parallelschaltung von R_i und R_V speist (Bild 1.19).

Bild 1.19: Ersatzstromquelle mit R_V belastet

Die Ersatzstromquelle muss der Forderung nach konstanter Einströmung mit dem Quellenstrom I_k genügen. Die ideale Stromquelle (Bild 1.19) muss den Innenwiderstand ∞ haben, während R_i endlich bleiben kann.

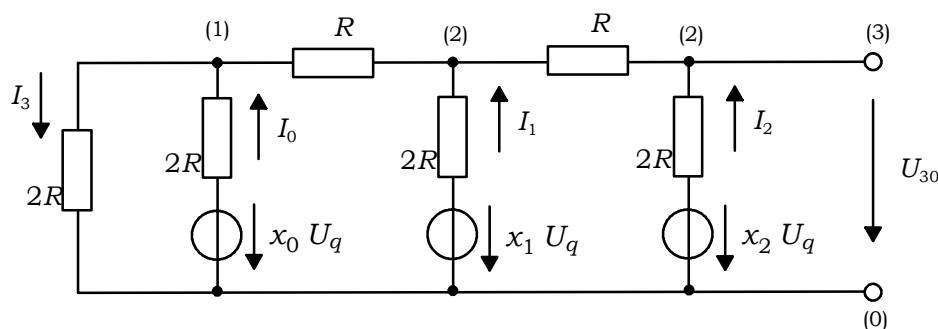
Die Größen der Ersatzstromquelle können ebenfalls messtechnisch bestimmt werden, wobei der Kurzschlussstrom normalerweise nicht gemessen wird. Ersatzstrom- und Ersatzspannungsquelle lassen sich ineinander umrechnen und sind somit gleichwertig. Vorzugsweise kann mit der Ersatzstromquelle gerechnet werden, wenn der Innenwiderstand einer betrachteten Spannungsquelle sehr viel größer als der Verbraucherwiderstand ist. Dies ist häufig bei Verstärkerschaltungen mit Transistoren oder in der Röhrentechnik der Fall.

1.4. Aufgabe

Gegeben ist nachfolgendes Ersatzschaltbild eines linearen *Digital-Analog-Umsetzers* (DAU) für drei Digitalstellen. Die Spannungsquellen in den Zweigen (1)-(0), (2)-(0) und (3)-(0) werden durch die booleschen Parameter x_0 , x_1 und x_2 ein- bzw. ausgeschaltet (Ein:="1", Aus:="0"), d.h. es kann die Dualzahl

$$z_{dez} = x_2 2^2 + x_1 2^1 + x_0 2^0$$

in eine analoge Spannung umgesetzt werden.



- 1.1. Berechnen Sie allgemein die Ersatzspannungsquelle (U_{qE} , R_i) des DAU bezgl. der Knoten (3)-(0)!
- 1.2. Berechnen Sie allgemein das Verhältnis $U_{30}/U_q=f(x_2, x_1, x_0)$!
- 1.3. Geben Sie für $U_{30}/U_q=f(x_2, x_1, x_0)$ eine Funktionstabelle (Wertetabelle) an!

2. Mittelwerte von Wechselgrößen

Zeitlich veränderliche Ströme $i(t)$ und Spannungen $u(t)$, aber auch Leistungen $p(t)$ können mithilfe ihrer Mittelwerte charakterisiert werden.

2.1. Der Gleichanteil

Für den Transport der Ladungsmenge $Q(t)$ eines Wechselstromes erhält man aus $i(t) = dQ(t)/dt$ durch Integration die Beziehung

$$Q(t) = \int_0^t i(t) dt \quad . \quad (\text{Glg. 2.1})$$

Vergleicht man die während einer Periode T durch den Wechselstrom $i(t)$ transportierte Ladungsmenge $Q(t)$ nach (Glg.2.1) mit der Ladungsmenge die ein Gleichstrom I bewegen würde, so kann der arithmetische Mittelwert

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (\text{Glg. 2.2})$$

angegeben werden. Der Mittelwert \bar{i} ist der Gleichanteil eines Signales und für $i(t) = \hat{i} \sin(\omega t)$ gilt beispielsweise $\bar{i} = 0$. Physikalisch interpretiert heißt das, dass die Ladungsmenge Q wird während der positiven Halbwelle in die eine und während der negativen Halbwelle in die andere Richtung zurücktransportiert wird: Es findet kein resultierender Ladungstransport statt. Der Begriff des Gleichanteils wird analog zu (Glg.2.2) auch für Spannungs- oder Leistungsverläufe verwendet. Für den Gleichanteil einer beliebigen zeitabhängigen Größe $x(t)$ gilt die Beziehung

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad . \quad (\text{Glg. 2.3})$$

Häufig kann der Gleichanteil eines Signals grafisch aus dem Signalverlauf bestimmt, oder zumindest abgeschätzt werden. Hierzu ist die Fläche zu bestimmen, die das Signal $x(t)$ mit der Zeitachse bildet und dieser Wert auf die Periodendauer T zu beziehen. Bei rein sinusförmiger Abhängigkeit ist der Gleichanteil $\bar{x} = 0$, da pro Periode gleiche Flächen oberhalb und unterhalb der t -Achse liegen.

Resultierenden Ladungsfluss in eine Richtung erhält man durch die Gleichrichtung eines Wechselstromes. Dabei kann der Momentanwert des Stromes sich durchaus mit der Zeit ändern, nur eben die Richtung nicht. Zur Gleichrichtung benötigt man ein Bauelement oder eine Schaltung mit Richtungswirkung, bzw. Ventilwirkung. Diese Eigenschaft wird durch die Halbleiterdiode in Gleichrichterschaltungen wie der Einpuls- bzw. Zweipulsleichrichtung (Bild 2.1-2.2) erfüllt.

2.1.1. Einpuls-Gleichrichtung

Bedingt durch die Richtwirkung der Diode findet der Stromfluss nur während der positiven Halbwelle der Netzspannung statt. Während der negativen Halbwelle sperrt die Diode und wirkt - ideal - wie ein offener Schalter. Dabei nimmt die Diode die gesamte Netzspannung als Sperrspannung auf.

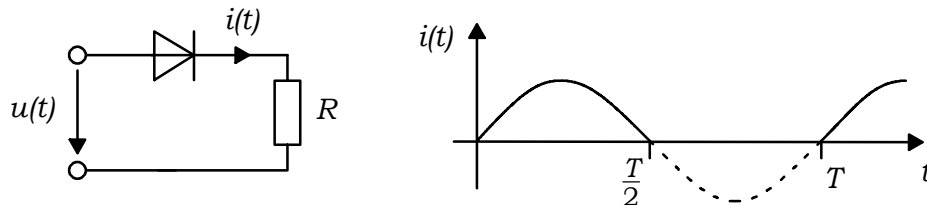


Bild 2.1: Einweg-Gleichrichtung und Stromverlauf

Während $t \in [0, T/2]$ fließt der Strom

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{\hat{u}}{R} \sin(\omega t)$$

und für $t \in [T/2, T]$ ist der Strom Null. Damit kann der Gleichanteil (*Gleichrichtwert*) berechnet werden; man erhält

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) dt \quad , \quad (\text{Glg. 2.4})$$

mit dem „Gleichrichtwert“ $|\bar{i}|$, wobei die Namensgebung und die Betragsstriche die Gleichrichtung verdeutlichen sollen. Für den Gleichanteil der Einweggleichrichtung gilt somit

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{i} \sin(\omega t) dt = \frac{\hat{i}}{T} \left[\frac{-\cos(\omega \frac{T}{2})}{\omega} - \frac{-\cos(\omega 0)}{\omega} \right] = \frac{\hat{i}}{\omega T} [1 - \cos(\omega \frac{T}{2})]$$

und wenn man noch den Zusammenhang $\omega T = 2\pi$ berücksichtigt folgt schließlich

$$|\bar{i}| = \frac{\hat{i}}{2\pi} [1 + 1] = \frac{\hat{i}}{\pi} \quad . \quad (\text{Glg. 2.5})$$

Der Wechselanteil - Brummanteil - kann mit

$$i_{\text{wechsel}}(t) = i(t) - |\bar{i}| = \hat{i} \left(\sin(\omega t) - \frac{1}{\pi} \right)$$

angegeben werden und ein typischer, mit *Mathematica* gerechneter normierter Verlauf ($\hat{i} = 1 \text{ (A)}$) ist in (Bild 2.2) dargestellt.

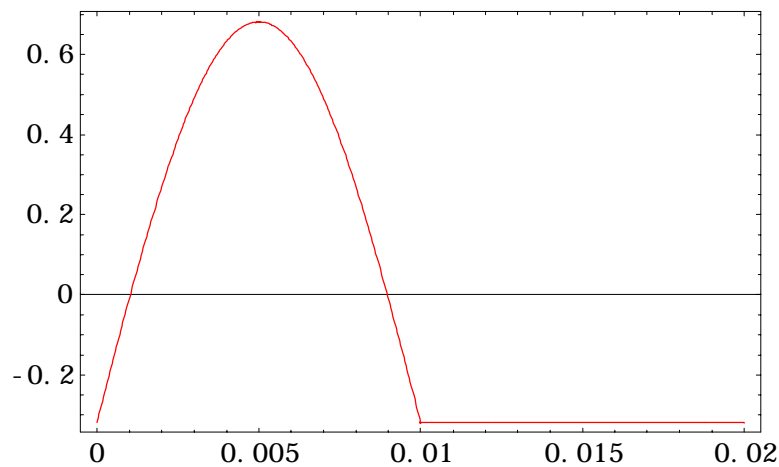


Bild 2.2: Verlauf des Wechselanteils bei Einpulsgleichrichtung

2.1.2. Zweipuls-Gleichrichtung

Bei der Einpuls-Gleichrichtung wird durch die Diode die negative Halbwelle weggekappt und ist für den Verbraucher verloren. Im Gegensatz hierzu wird die Energie des Wechselstroms am Eingang der Schaltung beim Zweipuls- oder Doppelweggleichrichter genutzt, indem sie über ein leitendes Diodenpaar sozusagen nach oben geklappt wird (Bild 2.3).

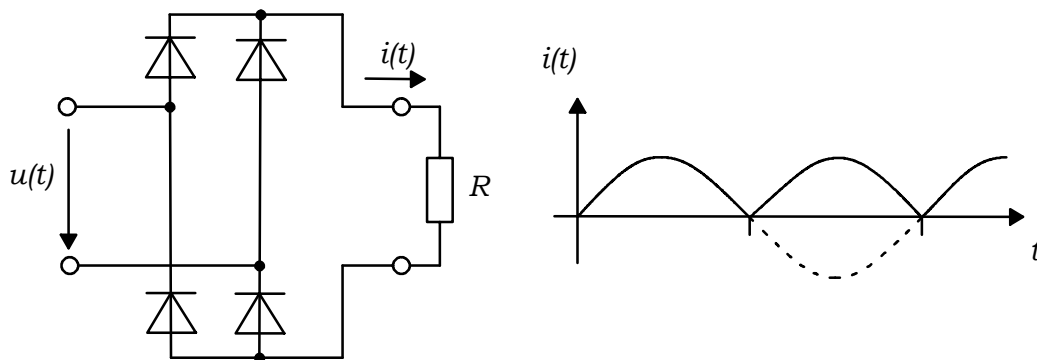


Bild 2.3: Brückengleichrichter und Stromverlauf

Der in (Bild 2.3) dargestellte Stromverlauf hat den Gleichanteil (Gleichrichtwert)

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt \quad , \quad (\text{Glg. 2.6})$$

bzw. für $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ und $i(t) = \hat{i} \sin(\omega t)$ erhält man mit $T=2\pi/\omega$:

$$|\bar{i}|/\hat{i} = |\bar{u}|/\hat{u} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} |\sin(\omega t)| d(\omega t) = \frac{2}{\pi} = 0,637 \text{ .}$$

Wie nicht anders zu erwarten ist der Wert doppelt so groß, wie bei der Einpulsgerichtung und der Wechselanteil wird mit

$$i_{wechsel}(t) = i(t) - |\bar{i}| = \hat{i} \left(\sin(\omega t) - \frac{2}{\pi} \right)$$

angegeben; einen typischen Verlauf zeigt (Bild 2.4).

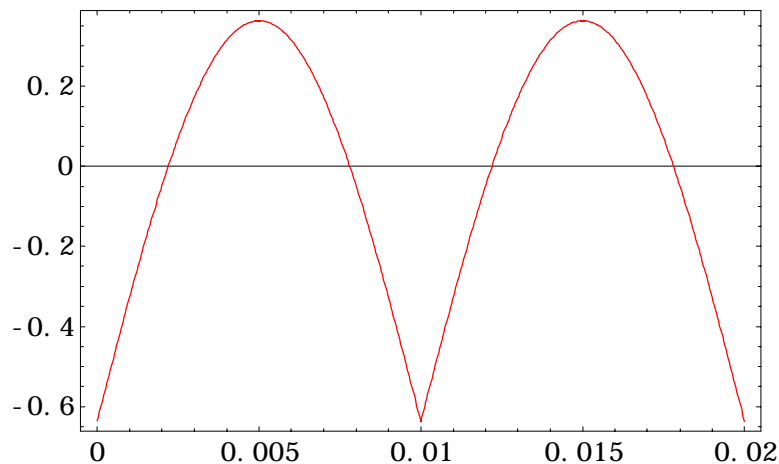
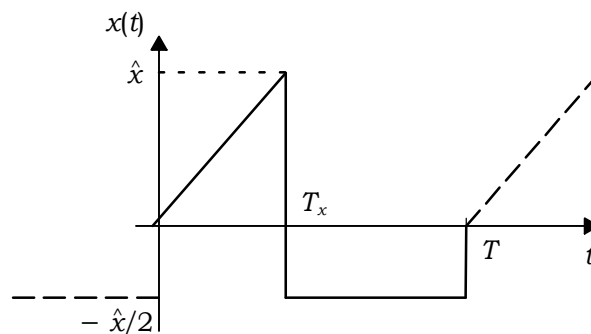


Bild 2.4: Verlauf des Wechselanteils bei Zweipulsgerichtung

2.1.3. Beispiele

Beispiel 1: Es soll der Gleichanteil der im Bild dargestellten periodischen Sägezahnspannung $u(t)$ berechnet werden.



Aufgrund der Einfachheit des Signales kann man die Fläche direkt angeben:

$$A = T \cdot \bar{x} = \frac{1}{2} \hat{x} T_x - \frac{\hat{x}}{2} (T - T_x) = \hat{x} (T_x - T/2)$$

und die Division durch T ergibt den gesuchten Gleichanteil.

Beispiel 2: Man berechne den Gleichanteil des analytisch gegebenen Mischstromes

$$i(t) = I_0 + \hat{i} \sin(\omega t) \quad ; \quad I_0, \hat{i}, \omega \in \mathbb{R} \quad .$$

Ohne Rechnung kann sofort I_0 abgelesen werden, da der Wechselanteil gleichanteilsfrei ist.

2.2. Der Effektivwert

2.2.1. Definition

Die Wärmewirkung eines zeitlich abhängigen Stromes $i(t)$ in einem Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ erhält man durch Integration der Leistung

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} i(t)^2 dt \quad ,$$

wobei insbesondere für T -periodische Wechselgrößen

$$W = R \int_0^T i(t)^2 dt$$

gilt. Vergleicht man die Wärmewirkung von $i(t)$ mit der eines über die gleiche Zeitdauer T fließenden Gleichstromes I , so gilt

$$W = R I^2 \int_0^T dt = R \int_0^T i(t)^2 dt \quad ,$$

bzw.

$$R I^2 T = R \int_0^T i(t)^2 dt$$

und schließlich

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} \quad . \quad (\text{Glg. 2.7})$$

Der in der Wärmewirkung gleiche Gleichstrom I nach (Glg. 2.7) wird als **Effektivwert** des Wechselstromes $i(t)$ bezeichnet. Für sinusförmigen Wechselstrom

$$i(t)^2 = \hat{i}^2 \sin^2(\omega t)$$

gilt beispielsweise

$$W = R \hat{i}^2 \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = R \hat{i}^2 \left[-\frac{\sin(\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega} + \frac{t}{2} \right]_0^T = R \hat{i}^2 T$$

und die Anwendung von (Glg.2.7) ergibt

$$I = \hat{i} / \sqrt{2} \quad . \quad (\text{Glg. 2.8})$$

Die Definition des Effektivwertes nach (Glg.2.8) kann entsprechend für die Spannung $u(t)$ an einem Widerstand aufgestellt werden, so dass man mit

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt} \quad (\text{Glg. 2.9})$$

für sinusförmige Spannungen schließlich den Effektivwert

$$U = \hat{u} / \sqrt{2} \quad (\text{Glg. 2.10})$$

erhält. (Bild 2.5) zeigt den qualitativen, normierten Verlauf des Wechselstromes $i(t)$ und der Leistung $p(t)$ an einen normierten Widerstand der Größe 1 und man erkennt, dass die Leistung mit der doppelten Frequenz schwingt.

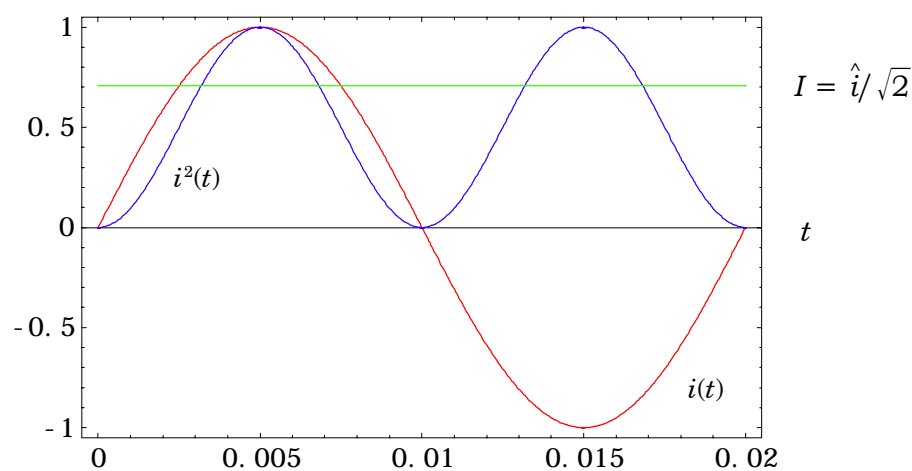


Bild 2.5: Verlauf der Wechselgröße $i(t)$ und ihres Quadrates

2.2.2. Effektivwert einer Mischgröße

Gegeben sei die Mischgröße

$$u(t) = \bar{u} + \tilde{u}(t) \quad ,$$

mit dem Gleichanteil \bar{u} und dem reinen Wechselanteil $\tilde{u}(t)$. Für das Quadrat des Effektivwertes gilt

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T [\bar{u} + \tilde{u}(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^T (\bar{u}^2 + 2\bar{u}\tilde{u}(t) + \tilde{u}^2(t)) dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[\bar{u}^2 \int_0^T dt + 2\bar{u} \int_0^T \tilde{u}(t) dt + \int_0^T \tilde{u}^2(t) dt \right] = \bar{u}^2 + \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}^2(t) dt \quad , \end{aligned}$$

da das mittlere Integral bei der Integration über eine Periode Null ergibt. Mit der Abkürzung

$$\tilde{U} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}^2(t) dt}$$

für den Effektivwert des Wechselanteils folgt schließlich für den Effektivwert des vollständigen Mischsignals

$$U = \sqrt{\bar{u}^2 + \tilde{U}^2} \quad . \quad (\text{Glg. 2.11})$$

Beispiel: Man berechne den Effektivwert des analytisch gegebenen Mischsignals

$$x(t) = 2.5 V + \frac{\sqrt{2}}{2} V \sin(\omega t) \quad ;$$

es ergibt sich

$$X = \sqrt{\left(\frac{5}{2} V\right)^2 + \left(\frac{1}{2} V\right)^2} = \sqrt{\frac{26}{4}} V = \frac{1}{2} \sqrt{26} V \quad .$$

2.3. Form- und Scheitelfaktor

1.) Formfaktor

Zur Beurteilung der Kurvenform dient der Formfaktor F . Er ist definiert als Quotient von Effektivwert und Gleichrichtwert (Gleichanteil)

$$F = I / |\bar{i}| \quad (\text{Glg. 2.12})$$

und bei sinusförmigem Verlauf erhält man

$$F = \frac{\hat{i}/\sqrt{2}}{\hat{i}2/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11 \quad .$$

Mit dem Formfaktor kann, sofern kein Oszilloskop vorhanden ist, eine grobe Abschätzung über die Kurvenform einer Wechselgröße erfolgen. Es müssen hierzu lediglich deren Effektivwert und Gleichanteil gemessen werden.

2.) Scheitelfaktor

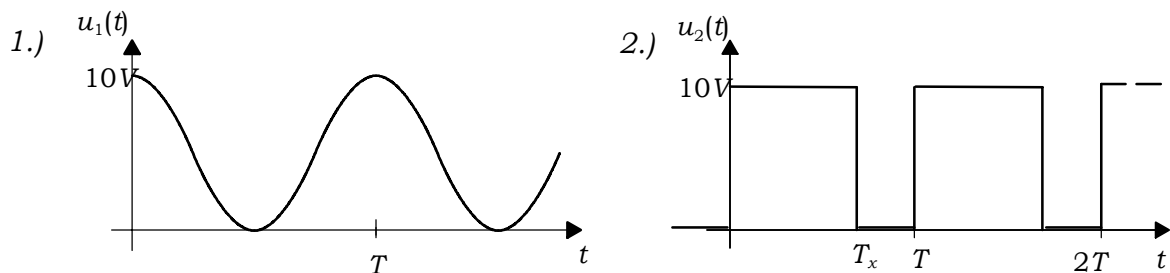
Der Scheitelfaktor (*Crest-Faktor*) gibt an, wie weit der Maximalwert i und der Effektivwert auseinanderliegen. Er berechnet sich aus dem Quotienten

$$\xi = \hat{i}/I \quad (\text{Glg. 2.13})$$

und für sinusförmigen Verlauf gilt $\xi = \sqrt{2}$.

2.4. Aufgabe

Gegeben sind die im Bild dargestellten Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$!



Wie groß muss die Einschaltdauer T_x gewählt werden, damit beide Signale an einem ohmschen Widerstand R die gleiche Wärmewirkung erzielen ($T=20\text{ms}$)?

3. Komplexe Wechselstromrechnung

3.1. Komplexe Darstellung sinusförmiger Größen

3.1.1. Überblick

Durch die Einführung der komplexen Rechnung wechselt die Betrachtungsweise von der reellen Zeitbereichsdarstellung zur komplexen Zeigerdarstellung. Hierbei wird die vollständige Charakterisierung sinusförmiger Größen in linearen Netzen durch deren Frequenz und Amplitude, oder Effektivwert, ausgenutzt. In der Elektrotechnik verwendet man für den mathematischen Operator $i = \sqrt{-1}$ den Buchstaben j , um die Verwechslung mit einem zeitabhängigen Strom zu vermeiden.

Die Spitze des Drehfaktors $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ beschreibt in der komplexen Ebene den Einheitskreis, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω durchlaufen wird. Damit kann der Zeiger \underline{u} wie folgt geschrieben werden:

$$\underline{u} = \hat{u} e^{j\omega t} \quad . \quad (\text{Glg. 3.1})$$

Den zugehörigen Zeitbereichsverlauf erhält man entweder durch die Projektion des Zeigers auf die imaginäre Achse

$$u(t) = \text{Im}[\underline{u}] = \hat{u} \sin(\omega t) \quad , \quad (\text{Glg. 3.2})$$

oder auf die reelle Achse mit

$$u(t) = \text{Re}[\underline{u}] = \hat{u} \cos(\omega t) \quad . \quad (\text{Glg. 3.3})$$

Die beiden Projektionen (Glg.3.2) und (Glg.3.3) unterscheiden sich nur durch die Phasenverschiebung $\pi/2$ und sind gleichwertig. Nachfolgend wird, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, der Projektion auf die imaginäre Achse nach (Glg.3.2) der Vorzug gegeben. In (Bild 3.1) ist ein komplexes Zeigerpaar und dessen durch Projektion entstandener Zeitverlauf als Beispiel dargestellt.

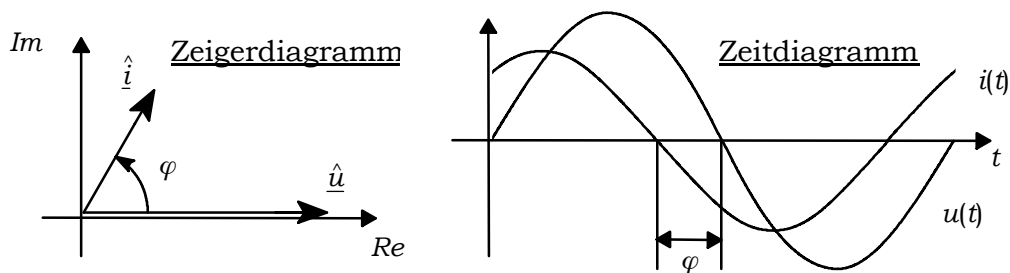


Bild 3.1: Zeigerdarstellung und Zeitdiagramm

Für den komplexen Stromzeiger gilt

$$\underline{i} = \hat{i} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \hat{i} e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (\text{Glg. 3.4})$$

und mit (Glg. 3.2) für dessen korrespondierenden Zeitverlauf

$$i(t) = \text{Im}[\underline{i}] = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{Glg. 3.5})$$

Der komplexe Stromzeiger setzt sich also aus seinem Betrag \hat{i} , dem Winkelfaktor $e^{j\varphi}$ und dem Drehfaktor $e^{j\omega t}$ zusammen.

3.1.2. Darstellung harmonischer Schwingungen durch konjugiert komplexe Zeiger

Aus der Eulerschen Gleichung für den Zeiger

$$\underline{u} = \hat{u} e^{j\omega t} = \hat{u} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

und der seines konjugiert komplexen Zeigers

$$\underline{u}^* = \hat{u} e^{-j\omega t} = \hat{u} (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t))$$

erhält man durch elementare Umformungen die reellen Zeitverläufe

$$u(t) = \text{Re}[\underline{u}] = \frac{\underline{u} + \underline{u}^*}{2} = \hat{u} \cos(\omega t) \quad (\text{Glg. 3.6})$$

und den um $\pi/2$ phasenverschobenen Verlauf

$$u(t) = \text{Im}[\underline{u}] = \frac{\underline{u} - \underline{u}^*}{2j} = \hat{u} \sin(\omega t) \quad (\text{Glg. 3.7})$$

Die (Glg.3.6) verdeutlicht man sich am besten anhand (Bild 3.2).

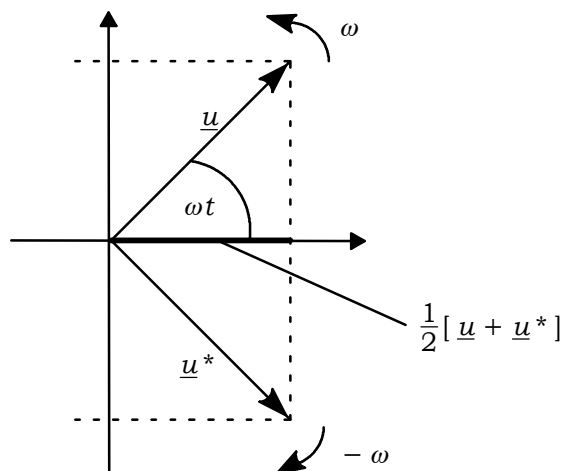


Bild 3.2: Rotierendes Paar konjugiert komplexer Zeiger

Der konjugiert komplexe Zeiger \underline{u}^* ist ein zu \underline{u} gegenläufiger Zeiger, der in negativer mathematischer Orientierung (Uhrzeigersinn) mit der gleichen konstanten Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) ω rotiert, wie der Zeiger \underline{u} . Die Überlagerung

$$2 \operatorname{Re}[\underline{u}] = \underline{u} + \underline{u}^*$$

ergibt zu jedem Zeitpunkt den doppelten Realteil von \underline{u} (oder \underline{u}^*). Mit (Bild 3.2) erhält man auch eine - zwar modellhafte jedoch recht anschauliche - physikalische Interpretation einer *negativen Kreisfrequenz*.

Die Projektionen auf die reelle oder die imaginäre Achse sind äquivalent und zeichnen sich nur durch die Phasenverschiebung $\pi/2$ aus. Daher kann man sich wahlweise für (Glg. 3.6) oder (Glg. 3.7) zur Gewinnung des gewünschten Zeitverlaufes entscheiden, nur müssen alle Netzwerkgrößen auf dem gleichen Weg zurücktransformiert werden, da sonst nicht vorhandene Phasenverschiebungen auftreten.

3.1.3. Komplexe Amplitude und Effektivwert

Allgemein kann die Wechselgröße

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Im}[\hat{x} e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

in komplexer Schreibweise durch

$$\underline{x} = \hat{x} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

geschrieben werden. Führt man die **komplexe Amplitude**

$$\underline{\hat{x}} = \hat{x} e^{j\varphi} \quad (\text{Glg. 3.8})$$

ein, so gilt

$$\underline{x} = \underline{\hat{x}} e^{j\omega t} .$$

Nach der Division durch $\sqrt{2}$ erhält man den **komplexen Effektivwert**

$$\underline{X} = \frac{\underline{\hat{x}}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = X e^{j\varphi} \quad (\text{Glg. 3.9})$$

der Wechselgröße. Zur besonderen Kennzeichnung komplexer Größen wird der Formelbuchstabe unterstrichen.

Zeiger mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω werden auch als **Phasoren** bezeichnet und in Darstellungen der komplexen Wechselstromrechnung wird der Drehfaktor $e^{j\omega t}$ oft einfach weggelassen, da in linearen Netzwerken alle Ströme und Spannungen mit derselben Kreisfrequenz schwingen; man betrachtet sie sozusagen als stillstehend und rechnet mit komplexen Amplituden oder Effektivwerten. Erst zur Angabe zeitlicher Verläufe wird der komplexe Drehfaktor in der komplexen Ebene wieder hinzugefügt.

3.2. Passive Wechselstromzweipole

Passive Zweipole sind entweder Energieverbraucher oder Energiespeicher, d.h. sie erzeugen keine Energie. Ein passiver Zweipol kann aus den Elementen Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C bestehen. Für Gleichstrom stellen Induktivitäten einen Kurzschluss und Kapazitäten eine Unterbrechung dar. Bei Wechselstrom, sind die Zusammenhänge

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

und

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

zwischen Strom und Spannung an Induktivität, bzw. Kapazität zu berücksichtigen. Nachfolgend wird für die passiven Zweipole eine Einzelbetrachtung ihres Wechselstromverhaltens durchgeführt.

3.2.1. Ohmscher Widerstand R

In Wirkwiderständen wird elektrische Energie irreversibel in Wärme umgewandelt und magnetische, sowie elektrische Felder können näherungsweise vernachlässigt werden. In Wechselstromkreisen verwendet man häufig die Begriffe **Resistenz** und **Konduktanz** anstelle von Widerstand und Leitwert, um vom Gleichstrombetrieb zu unterscheiden.

1.) Spannung, Strom und Phasenwinkel

In (Bild 3.3) ist ein rein ohmscher Verbraucherwiderstand R an eine sinusförmige Wechselspannung angeschlossen und die Größen Spannung und Strom sind als komplexe Effektivwerte geschrieben.

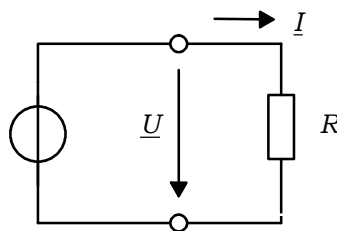


Bild 3.3: Wechselspannungsquelle und Wirkwiderstand

Für den Zeitwert des Stromes gilt bei sinusförmiger Wechselspannung

$$i(t) = G u(t) = \frac{\hat{u}}{R} \sin(\omega t) = \hat{i} \sin(\omega t) \quad , \quad (\text{Glg. 3.10})$$

d.h. Strom und Spannung sind in jedem Zeitpunkt zueinander direkt proportional und es tritt keine Phasenverschiebung auf. In komplexer Schreibweise gilt für die Spannung

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}[\hat{u} e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

und für den Strom

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}[\hat{i} e^{j(\omega t + \varphi)}] \quad ,$$

so dass man (Glg.3.10) wie folgt schreiben kann:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{\text{Im}[\hat{u} e^{j\omega t}]}{R} = \text{Im}\left[\frac{\hat{u}}{R} e^{j\omega t}\right] = \frac{\hat{u}}{R} \sin(\omega t) \quad , \quad (\text{Glg. 3.11})$$

bzw. mit komplexen Effektivwerten:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{\text{Im}[\sqrt{2} U e^{j\omega t}]}{R} = \text{Im}\left[\sqrt{2} \frac{U}{R} e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2} \frac{U}{R} \sin(\omega t) \quad . \quad (\text{Glg. 3.12})$$

Damit kann das ohmsche Gesetz in komplexer Schreibweise angegeben werden und man erhält für den Effektivwert des Stromes

$$\underline{I} = \underline{U}/R \quad . \quad (\text{Glg. 3.13})$$

Der zeitliche Verlauf von Strom und Spannung, sowie das entsprechende Zeigerdiagramm (reelle und imaginäre Achse sind in der Darstellung weggelassen) sind in (Bild 3.4) dargestellt.

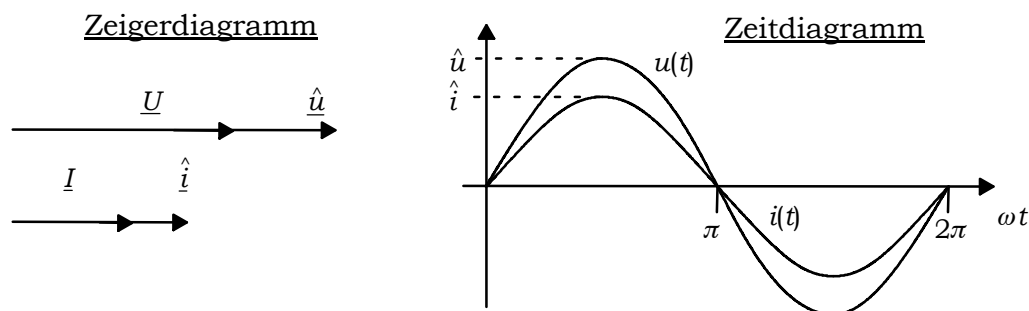


Bild 3.4: Spannungs- und Stromverlauf am ohmschen Widerstand

Der Wechselstromwiderstand ist eine rein reelle Größe und weicht erst bei sehr hohen Frequenzen (bei Stromverdrängung) vom Gleichstromwiderstand ab.

2.) Wirkleistung

Für den Zeitwert der Momentanleistung $s(t)$ gilt

$$s(t) = u(t) i(t) = i(t)^2 R = \frac{u(t)^2}{R} \quad (\text{Glg. 3.14})$$

und mit $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ folgt unter Anwendung eines Additionstheorems

$$s(t) = \frac{1}{R} \hat{u}^2 \sin^2(\omega t) = \frac{\hat{u}^2}{R} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) \quad .$$

Die Momentanleistung $s(t)$ schwingt also mit der doppelten Frequenz von Spannung und Strom (Bild 3.5) und man erkennt, dass sie nur positive Werte annimmt, d.h. der Wirkwiderstand nimmt stets elektrische Leistung auf.

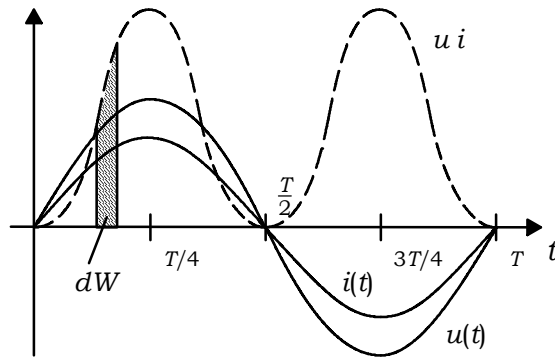


Bild 3.5: Leistung, Strom und Spannung am ohmschen Widerstand

Die in einer Periode T umgesetzte elektrische Energie W ist die Fläche, die der Verlauf von $s(t)$ mit der Zeitachse einschließt (Bild 3.5) und berechnet sich durch Integration mit

$$W = \int_0^T dW = \int_0^T u(t) i(t) dt = \hat{u} \hat{i} \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega t) d(\omega t) = \hat{u} \hat{i} \frac{T}{2}$$

Damit kann die mittlere Leistung P über eine Periode T der Wechselspannung angegeben werden; die Division durch T ergibt die Wirkleistung

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T dW = \frac{W}{T} = \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = UI \quad .$$

D.h. die Wirkleistung P errechnet sich einfach aus dem Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung

$$P = UI = R I^2 = U^2/R \quad . \quad (\text{Glg. 3.15})$$

Damit ist (Glg.3.15) die gleiche Beziehung wie bei der Gleichstromleistung, wenn anstelle der Gleichstromgrößen nun die Effektivwerte der Wechselgrößen verwendet werden.

3.2.2. Die Induktivität L

In diesem Abschnitt wird die ideale Induktivität betrachtet, d.h. Leitungswiderstände und elektrische Felder werden vernachlässigt. Durch konstruktive Maßnahmen gelingt es, dass der ohmsche Widerstand sehr viel kleiner als der noch zu definierende induktive Widerstand wird.

1.) Spannung, Strom und Phasenwinkel

Für den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an der Induktivität (Bild 3.6)

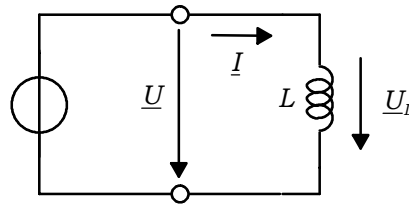


Bild 3.6: Induktivität an Wechselspannung

gilt im Zeitbereich

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} ,$$

bzw.

$$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt .$$

Mit der Spannung $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ erhält man den Strom

$$i(t) = \frac{1}{L} \int \hat{u} \sin(\omega t) dt = -\frac{\hat{u}}{\omega L} \cos(\omega t)$$

durch unbestimmte Integration und mit $-\cos(\omega t) = \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ folgt schließlich

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) .$$

Der Strom und die Spannung an der Induktivität sind also um den Winkel $\pi/2=90^\circ$ phasenverschoben. Man sagt, der Strom eilt der Spannung nach, da dessen Maximum um $\omega t = \pi/2$ später kommt. (Bild 3.7) zeigt den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung an einer idealen Induktivität, sowie das zugehörige Zeigerdiagramm:

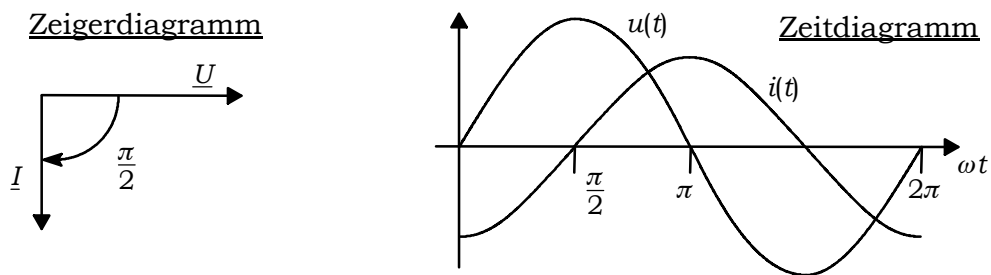


Bild 3.7: Strom und Spannung an der Induktivität

In komplexer Schreibweise gilt für die Spannung

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t) = \text{Im}[\hat{u} e^{j\omega t}]$$

und für den Strom

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \text{Im}[\frac{\hat{u}}{\omega L} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}] \quad ,$$

bzw.

$$i(t) = \text{Im}[\frac{\hat{u}}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}] = \text{Im}[\frac{\hat{u}}{j\omega L} e^{j\omega t}] \quad (\text{Glg. 3.16})$$

wenn man den Zusammenhang

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2}) = -j = \frac{1}{j}$$

beachtet.

2.) Induktiver Blindwiderstand

Aus (Glg.3.16) erhält man für die komplexe Amplitude des induktiven Stromes

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{j\omega L}$$

und nach Division durch den Scheitelfaktor $\xi = \sqrt{2}$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{j\omega L}$$

für die komplexen Effektivwerte. Bildet man nach dem ohmschen Gesetz den Quotienten von Strom und Spannung an der Induktivität, so ist das Ergebnis von der Dimension her ein Widerstand

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L = jX_L \quad (\text{Glg. 3.17})$$

und man bezeichnet X_L als induktiven Blindwiderstand und den negativen Kehrwert

$$\frac{1}{jX_L} = \frac{1}{j\omega L} = j\left(-\frac{1}{\omega L}\right) = jB_L \quad (\text{Glg. 3.18})$$

als induktiven Blindleitwert B_L .

Die Abhängigkeit des induktiven Blindwiderstandes, bzw. Blindleitwertes, von $\omega = 2\pi f$ wird allgemein als **Frequenzgang**, der sich aus dem **„Amplitudengang“** $X_L(\omega)$ und dem **Phasengang** $\varphi(\omega)$ zusammensetzt, bezeichnet. In der Wechselstromtechnik verwendet man für Blindwiderstand und -leitwert die Begriffe **Reaktanz** und **Suszeptanz**.

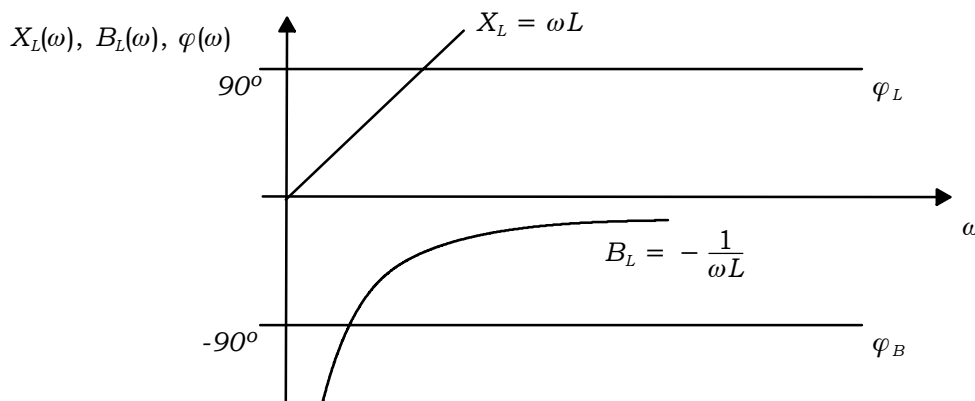


Bild 3.8: Frequenzgang des induktiven Blindwiderstandes und - leitwertes

3.) Induktive Blindleistung

Für die Momentanleistung $s(t)$ an einer Induktivität L gilt unter Verwendung der Klemmengrößen $u(t)$ und $i(t)$

$$s(t) = u(t) i(t) = -\hat{u} \hat{i} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \quad ,$$

bzw. nach Anwendung eines Additionstheorems

$$s(t) = -\frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \sin(2\omega t) = -UI \sin(2\omega t) \quad . \quad (\text{Glg. 3.19})$$

Den allgemeinen Verlauf von Strom, Spannung und Leistung zeigt (Bild 3.9).

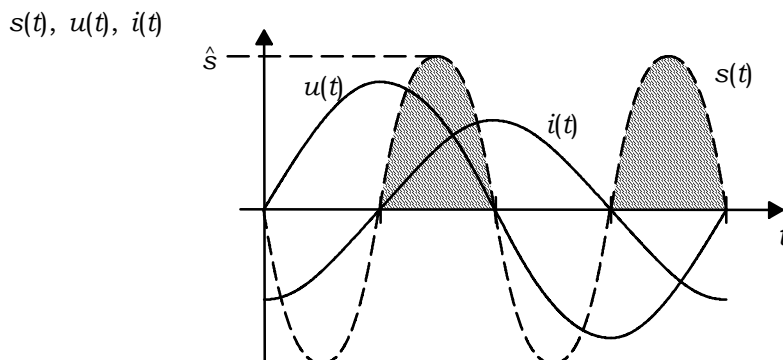


Bild 3.9: Verlauf der induktiven Blindleistung

Die Momentanleistung $s(t)$ schwingt mit der doppelten Netzfrequenz, d.h. die während einer Achtelperiode gespeicherte magnetische Energie wird in der nächsten wieder an das Netz abgegeben. Die mittlere Leistung P ist gleich Null, d.h. es wird keine Wirkleistung umgesetzt. Die Flächen unter dem Graphen von $s(t)$ heben sich während einer Periode vollständig auf und das Produkt

$$Q_L = UI = I^2 X_L = - U^2 B_L \quad (\text{Glg. 3.20})$$

aus (Glg.3.20) wird als induktive **Blindleistung** Q_L bezeichnet. Die Einheit von Q_L wäre eigentlich das Watt, aber um eine Unterscheidung zur Wirkleistung zu treffen schreibt man

$$[Q_L] = 1 \text{ VA}$$

und manchmal auch noch $[Q_L]=1\text{VAr}$, worin das r für *reaktive* Leistung steht. Die Wahl des Vorzeichens in (Glg.3.20) wird in Übereinstimmung mit der Einführung der komplexen Scheinleistung getroffen.

Der Aufbau und die Übertragung von Blindleistung z.B. zum Antrieb eines Elektromotors verursachen Kosten, d.h. man strebt bei der Energieübertragung eine Kompensation von Blindleistung an.

3.2.3. Die Kapazität C

In diesem Abschnitt wird nur die reine, ideale Kapazität C betrachtet, d.h. Zuleitungswiderstände und -induktivitäten bleiben dabei unberücksichtigt.

1.) Spannung, Strom und Phasenwinkel

Für den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an der Kapazität (Bild 3.10)

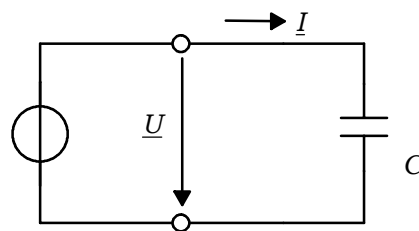


Bild 3.10: Kapazität an Wechselspannung

gilt im Zeitbereich

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} ,$$

bzw. nach der Spannung aufgelöst

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt .$$

Mit $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ folgt für den Strom

$$i_C(t) = C \omega \hat{u} \cos(\omega t) = \omega C \hat{u} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

und man erkennt, dass der Ladestrom $i_C(t)$ der Kondensatorspannung $u_C(t)$ um den Winkel $\omega t = \pi/2$ vorausschleift (Bild 3.11).

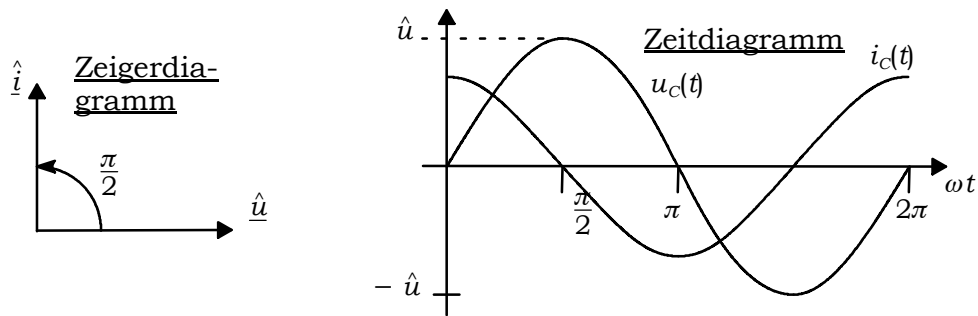


Bild 3.11: Spannung und Strom am Kondensator

In komplexer Schreibweise gilt für die Spannung

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t) = \text{Im}[\hat{u} e^{j\omega t}]$$

und für den Strom

$$i(t) = \omega C \hat{u} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \text{Im}[\omega C \hat{u} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}] ,$$

bzw.

$$i(t) = \text{Im}[\omega C \hat{u} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}] = \text{Im}[j\omega C \hat{u} e^{j\omega t}] \quad (\text{Glg. 3.21})$$

wenn man

$$e^{j\pi/2} = \cos(\frac{\pi}{2}) + j\sin(\frac{\pi}{2}) = j$$

beachtet.

2.) Kapazitiver Blindwiderstand

Aus (Glg.3.21) erhält man für die komplexe Amplitude des kapazitiven Stromes

$$\hat{i} = j\omega C \hat{u}$$

und nach Division durch den Scheitelfaktor $\xi = \sqrt{2}$

$$\underline{I} = j\omega C \underline{U}$$

für die komplexen Effektivwerte. Bildet man nach dem ohmschen Gesetz den Quotienten von Strom und Spannung an der Kapazität, so ist das Ergebnis von der Dimension her wiederum ein Widerstand

$$\frac{U}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C \quad (\text{Glg. 3.22})$$

und man bezeichnet X_C als kapazitiven Blindwiderstand und den negativen Kehrwert

$$\frac{1}{-jX_C} = j\omega C = j\left(-\frac{1}{X_C}\right) = jB_C \quad (\text{Glg. 3.23})$$

als kapazitiven Blindleitwert B_C . Das (Bild 3.12) zeigt den zugehörigen Verlauf des Frequenzgangs.

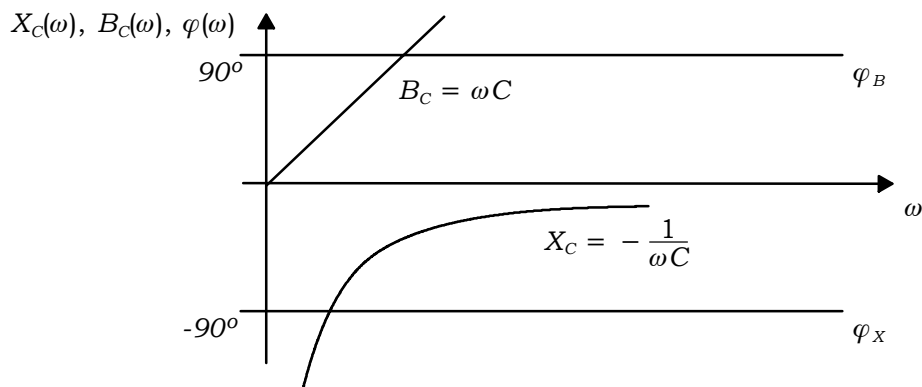


Bild 3.12: Verlauf von X_C und B_C

Im Vergleich zur Induktivität (Bild 3.8) haben Blindwiderstand und -leitwert ihre Verläufe sozusagen vertauscht, sie verhalten sich zueinander *dual*.

3.) Kapazitive Blindleistung

Für die kapazitive Blindleistung gilt

$$s(t) = u(t) \dot{i}(t) = \hat{u} \hat{i} \sin(\omega t) \cos(\omega t) ,$$

bzw. unter Anwendung eines Additionstheorems

$$s(t) = \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \sin(2\omega t) = UI \sin(2\omega t) . \quad (\text{Glg. 3.24})$$

Der Verlauf von Strom, Spannung und Leistung ist in (Bild 3.13) dargestellt. Die Momentanleistung schwingt ebenfalls mit der doppelten Netzfrequenz, d.h. die während einer Achtelperiode gespeicherte elektrische Energie wird in der nächsten wieder an das Netz abgegeben und die mittlere Leistung P ist Null. Die kapazitive Blindleistung Q_C erhält man aus (Glg.3.60) mit den Effektivwerten

$$Q_C = -UI = -U^2 B_C = I^2 X_C . \quad (\text{Glg. 3.25})$$

Im Gegensatz zur induktiven Blindleistung ändert sich hier das Vorzeichen. Das entgegengesetzte Verhalten der Blindleistungen bei Indukti-

vität und Kapazität wird technisch in Schwingkreisen und zur Blindstromkompensation genutzt.

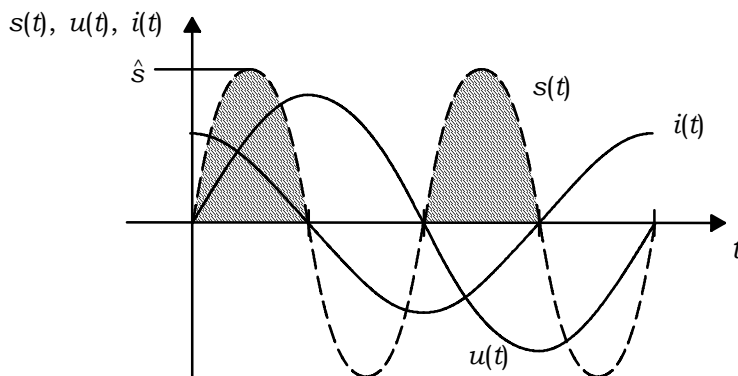


Bild 3.13: Verlauf der kapazitiven Blindleistung

3.2.4. Allgemeiner passiver Wechselstromzweipol

In beliebigen, aus den passiven Grundelementen R , L und C aufgebauten Schaltungen wird der Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung an den Anschlussklemmen im Intervall $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ liegen (Bild 3.14).

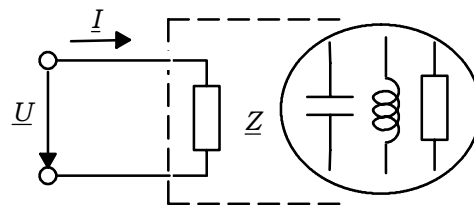


Bild 3.14: Zum Scheinwiderstand Z

Das (Bild 3.15) zeigt das Klemmenverhalten, wie es bei einer Kombination von ohmschen Widerstand R und - resultierendem - induktiven Blindwiderstand L auftritt. Da das Maximum des Stromes zeitlich nach dem der Spannung liegt, spricht man von induktivem Verhalten.

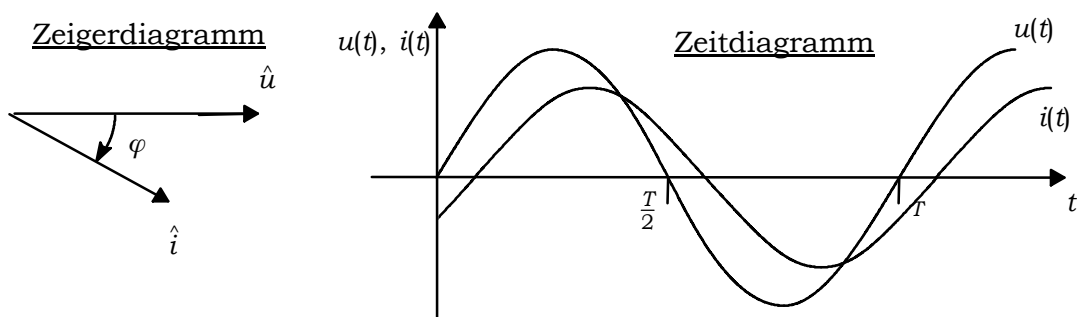


Bild 3.15: Zeiger- und Zeitdiagramm eines allgemeinen WS-Zweipols

Um auch hier mit dem verallgemeinerten ohmschen Gesetz in komplexer Schreibweise arbeiten zu können, fasst man den scheinbar

wirkenden Wechselstromwiderstand \underline{Z} als Quotient der komplexen Klemmengrößen \underline{U} und \underline{I} auf; es gilt

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \quad (\text{Glg. 3.26})$$

und für dessen Kehrwert

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{\hat{i}}{\hat{u}} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad (\text{Glg. 3.27})$$

Der Scheinwiderstand \underline{Z} wird als **Impedanz**, der Scheinleitwert \underline{Y} als **Admittanz** bezeichnet. Beachtet man

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) = \text{Im}[\hat{u} e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}]$$

und

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) = \text{Im}[\hat{i} e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}] \quad ,$$

so gilt für den Scheinwiderstand

$$\underline{Z} = \frac{\hat{u} e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}}{\hat{i} e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi_Z} \quad (\text{Glg. 3.28})$$

mit dem Betrag

$$|\underline{Z}| = Z = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I} \quad (\text{Glg. 3.29})$$

und der Phase

$$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i \quad (\text{Glg. 3.30})$$

Mit (Glg.3.63) erhält man noch

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} e^{j\varphi_Y} \quad (\text{Glg. 3.31})$$

mit dem Winkel $\varphi_Y = -\varphi_Z = \varphi_i - \varphi_u$ des Scheinleitwertes. Bei der Angabe des Scheinleitwertes nach (Glg.3.27) wurde die Spannung, bei der Angabe des Scheinwiderstandes nach (Glg.3.26) der Strom als Bezugsgröße gewählt. Aus (Glg.3.28) und (Glg.3.31) entnimmt man, dass sich der Drehfaktor $e^{j\omega t}$ bei der Berechnung des Scheinwiderstandes herauskürzt, d.h. \underline{Z} und \underline{Y} sind keine Drehzeiger sondern feste Zeiger in der komplexen Ebene (Bild 3.16).

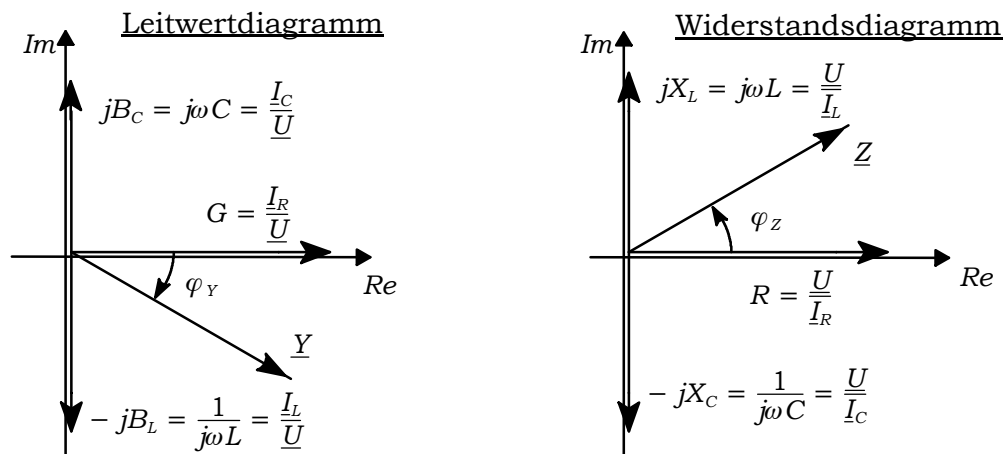


Bild 3.16: Komplexes Leitwert- und Widerstandsdiagramm

Der Wirkwiderstand R und Wirkleitwert G scheinen als reelle Größen. Die Blindwiderstände X_C und X_L , sowie die Blindleitwerte B_C und B_L sind rein imaginär (siehe auch Phasenverschiebung zwischen \underline{I} und \underline{U}).

Leistungen

Der allgemeine Wechselstromzweipol nimmt an seinen Klemmen die reelle, momentane Scheinleistung

$$\begin{aligned} s(t) &= u(t) \dot{i}(t) = \hat{u} \hat{i} \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= \hat{u} \hat{i} \sin(\omega t) [\sin(\omega t) \cos \varphi + \cos(\omega t) \sin \varphi] \end{aligned}$$

auf. Durch eine Reihe von Umformungen unter Anwendung von Additionstheoremen erhält man mit Effektivwerten U und I :

$$s(t) = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] \quad . \quad (\text{Glg. 3.32})$$

Das Produkt der Effektivwerte U und I wird als Scheinleistung S bezeichnet, da dies der maximal auftretende Wert von $s(t)$ ist

$$S = UI \quad . \quad (\text{Glg. 3.33})$$

Mit der Impedanz Z gilt weiterhin:

$$S = Z I^2 = \frac{U^2}{Z} \quad . \quad (\text{Glg. 3.34})$$

Aus (Glg. 3.32) ist ersichtlich, dass die Leistung $s(t)$ um den konstanten Wert $UI \cos \varphi$ schwingt. Dies ist die im Verbraucher umgesetzte Wirkleistung

$$P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi \quad , \quad (\text{Glg. 3.35})$$

mit dem Leistungsfaktor $\cos \varphi$. Durch weitere Umformung von (Glg.3.32) erhält man

$$s(t) = P[1 - \cos(2\omega t)] + Q \sin(2\omega t) \quad , \quad (\text{Glg. 3.36})$$

mit der Blindleistung Q und dem Blindfaktor $\sin \varphi$

$$Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi \quad . \quad (\text{Glg. 3.37})$$

Aus den Beziehungen (Glg.3.33), (Glg.3.35) und (Glg.3.37) folgt schließlich der wichtige allgemeingültige Zusammenhang

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad . \quad (\text{Glg. 3.38})$$

Der formale Vergleich mit der Polardarstellung komplexer Zahlen nach $\underline{z} = z(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ führt zur Einführung der komplexen Leistung

$$\underline{S} = S(\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + jQ \quad . \quad (\text{Glg. 3.39})$$

Die zugehörigen Zeigerdiagramme zeigt (Bild 3.17)

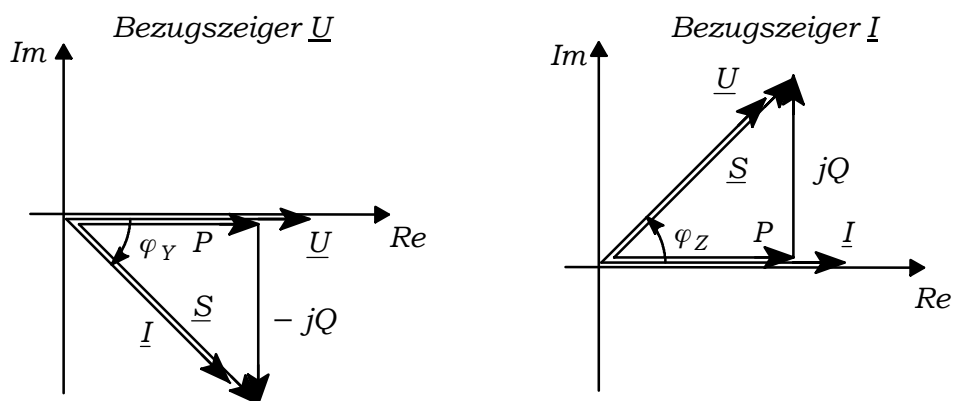


Bild 3.17: Zur komplexen Leistung \underline{S}

Offen ist noch die Berechnung der komplexen Scheinleistung \underline{S} aus den Effektivwerten \underline{I} und \underline{U} . Hierzu entnimmt man (Bild 3.18)

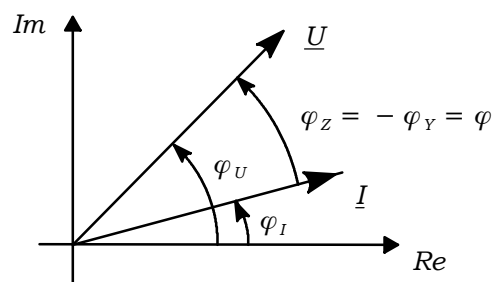


Bild 3.18: Komplexe Zeiger \underline{U} und \underline{I}

für den Phasenwinkel zwischen \underline{U} und \underline{I} den Winkel $\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I$.

Wird nun das Produkt

$$\underline{U} \underline{I} = UI e^{j(\varphi_U + \varphi_I)}$$

gebildet, so tritt die Summe der Nullphasenwinkel und nicht deren erwartete Differenz auf. Eine zwar mathematische, jedoch elektrotechnisch anschauliche Lösung findet man durch die Verwendung des konjugiert komplexen Zeigers von \underline{I}

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = UI e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} \quad , \quad (\text{Glg. 3.40})$$

mit dem „richtigen“ Winkel

$$\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I \quad . \quad (\text{Glg. 3.41})$$

3.3. Ersatzschaltungen

Beim allgemeinen Wechselstromzweipol (Bild 3.19) stellt sich an den Klemmen ein resultierendes Verhalten - induktiv, ohmsch oder kapazitiv - ein,

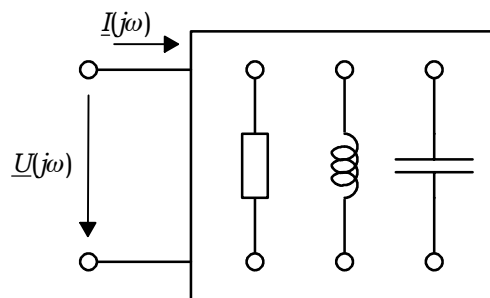


Bild 3.19: Allgemeiner WS-Zweipol

d.h. die Größen $\underline{U}(j\omega)$ und $\underline{I}(j\omega)$ stehen in einer festen Betrags- und Phasenbeziehung zueinander. Diese Eigenschaft ermöglicht das Umrechnen ganzer Netzwerke in Ersatzzweipole (analog der Zusammenfassung ohmscher Widerstände im GS-Kreis), die bezogen auf die Klemmen das gleiche Verhalten haben. Zu beachten ist jedoch, dass die jeweilige Ersatzschaltung nur für eine feste Kreisfrequenz ω gültig ist.

3.3.1. Reihenersatzschaltung

Die Reihenersatzschaltung soll an dem Netzwerk (Bild 3.20) erläutert werden. Der Scheinwiderstand $\underline{Z}(j\omega)$ an den Eingangsklemmen kann allgemein angegeben werden; es gilt

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

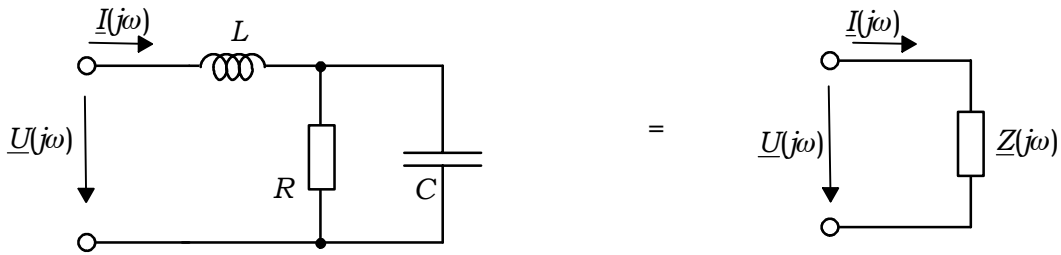


Bild 3.20: Ersatzzweipol für RLC-Reihenschaltung

und durch elementare Umformungen ergibt sich

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega L + R \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right) ,$$

mit dem frequenzabhängigen Realteil

$$R_{er} = \operatorname{Re}[\underline{Z}(j\omega)] = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

und dem frequenzabhängigen Imaginärteil

$$X_{er} = \operatorname{Im}[\underline{Z}(j\omega)] = \omega L - \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} .$$

Damit kann der Ersatzzweipol $\underline{Z}(j\omega)$ in (Bild 3.20) in seinen Wirk- und Blindwiderstand zerlegt werden (Bild 3.21).

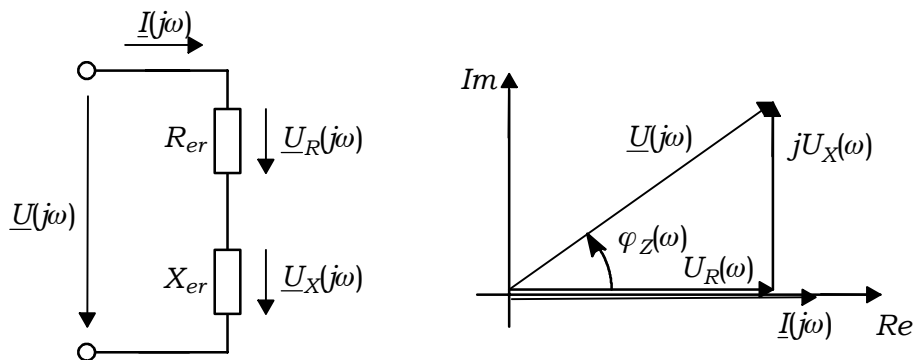


Bild 3.21: Aufteilung des Ersatzwiderstandes in Wirk- und Blindanteil

Die Spannung $U_R(\omega)$ ist immer positiv reell und $U_X(\omega)$ ist je nach Art des Blindwiderstandes positiv oder negativ imaginär, bzw. gleich Null im Resonanzfall. Den Reihenersatz-Wirkwiderstand R_{er} erhält man durch die Bildung des Realteiles der Impedanz; es gilt

$$R_{er} = \operatorname{Re}[\underline{Z}(j\omega)] = Z(\omega) \cdot \cos \varphi_Z(\omega) . \quad (\text{Glg. 3.42})$$

Für den Reihenersatz-Blindwiderstand X_{er} gilt analog durch die Bildung des Imaginärteiles der Impedanz

$$X_{er} = \text{Im}[Z(j\omega)] = Z(\omega) \cdot \sin \varphi_Z(\omega) \quad . \quad (\text{Glg. 3.43})$$

Hier muss nun allerdings eine Fallunterscheidung für induktives und kapazitives Verhalten getroffen werden. Für Induktives Verhalten gilt

$$X_{er} = \omega L_{er} > 0, \quad \varphi_X = \frac{\pi}{2}$$

und für die Ersatzinduktivität

$$L_{er} = X_{er}/\omega \quad . \quad (\text{Glg. 3.44})$$

Das kapazitive Verhalten ist charakterisiert durch

$$X_{er} = \frac{1}{\omega C_{er}} < 0, \quad \varphi_X = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{Glg. 3.45})$$

und der Ersatzkapazität

$$C_{er} = \frac{1}{X_{er} \omega} \quad . \quad (\text{Glg. 3.46})$$

Beide Ersatzgrößen aus (Glg.3.44) und (Glg.3.46) sind je nur für eine Kreisfrequenz ω gültig.

3.3.2. Parallelersatzschaltung

Entsprechend der oben diskutierten Reihenersatzschaltung kann eine Admittanz $\underline{Y}(j\omega)$ durch eine Parallelersatzschaltung mit nur zwei Elementen dargestellt werden (Bild 3.22)

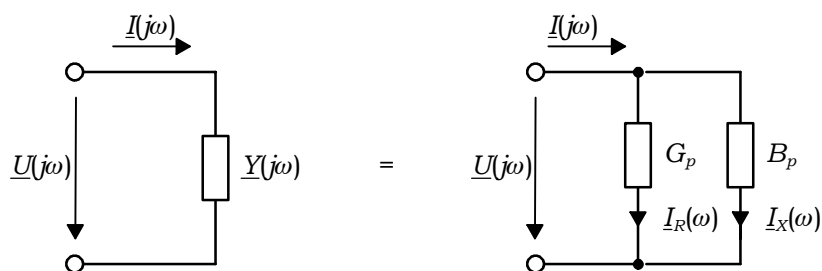


Bild 3.22: Ersatzzweipol der Parallelschaltung

Durch die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil der Admittanz $\underline{Y}(j\omega)$ erhält man den ohmschen Ersatzleitwert

$$G_p = \text{Re}[\underline{Y}(j\omega)] = Y(\omega) \cdot \cos \varphi_Z(\omega) \quad (\text{Glg. 3.47})$$

und den parallelen Blindleitwert

$$B_p = \text{Im}[\underline{Y}(j\omega)] = Y(\omega) \cdot \sin \varphi_Z(\omega) \quad . \quad (\text{Glg. 3.48})$$

Auch hier ist eine Fallunterscheidung nötig; so gilt für induktives Verhalten

$$B_p = \frac{1}{\omega L_p} < 0, \quad \varphi_Y = -\frac{\pi}{2}$$

und für die parallele Ersatzinduktivität

$$L_p = \frac{1}{B_p \omega} \quad . \quad (\text{Glg. 3.49})$$

Das kapazitive Verhalten ist charakterisiert durch

$$B_p = \omega C_p > 0, \quad \varphi_Y = \frac{\pi}{2} \quad (\text{Glg. 3.50})$$

und durch die parallele Ersatzkapazität

$$C_p = B_p / \omega \quad . \quad (\text{Glg. 3.51})$$

Beide Ersatzgrößen aus (Glg.3.49) und (Glg.3.51) sind wiederum je nur für eine Kreisfrequenz ω gültig.

Beispiel:

Als Beispiel soll nun die Reihen- und Parallelersatzschaltung des Netzwerkes (Bild 3.20) für die Bauelemente $R=1\Omega$, $L=1\text{mH}$, $C=1\text{mF}$ und die Kreisfrequenz $\omega=10^3/\text{s}$ bestimmt werden. Man erhält für die Impedanz

$$\begin{aligned} \underline{Z}(j\omega) &= j10^3 \frac{1}{\text{s}} 10^{-3} \text{H} + \frac{1\Omega}{1 + j10^3 \frac{1}{\text{s}} 10^{-3} \text{F} 1\Omega} = j1\Omega + \frac{1\Omega}{1 + j} = \\ &= j1\Omega + \frac{1}{2} (1 - j)\Omega = \frac{1}{2}\Omega + j\frac{1}{2}\Omega \end{aligned}$$

und man erkennt das induktive Verhalten, da der Imaginärteil $\text{Im}[\underline{Z}(j\omega)] > 0$ ist. Damit gilt für die Elemente der Reihenersatzschaltung, d.h. zunächst für den Wirkwiderstand

$$R_{er} = \text{Re}[\underline{Z}(j\omega)] = \frac{1}{2}\Omega$$

und für die Reihenersatz-Induktivität bei der angegebenen Kreisfrequenz

$$L_{er} = \frac{0.5\Omega}{10^3 \frac{1}{\text{s}}} = 0.5\text{mH} \quad .$$

Zur Berechnung der Elemente der Parallelersatzschaltung muss zunächst der komplexe Scheinleitwert bestimmt werden. Diesen erhält man durch Inversion

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(j\omega)} = \frac{2}{1+j} \text{S} = 2 \frac{1-j}{2} \text{S} = 1\text{S} - j1\text{S}$$

und man entnimmt den Parallelersatz-Widerstand zu

$$R_p = \frac{1}{\text{Re}[\underline{Y}(j\omega)]} = 1\Omega$$

und die Parallelersatz-Induktivität

$$L_p = \frac{1}{1\text{S} \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}} = 1\text{mH} \quad .$$

Das ursprüngliche Netzwerk und seine beiden äquivalenten Ersatzschaltungen sind in (Bild 3.23) dargestellt.

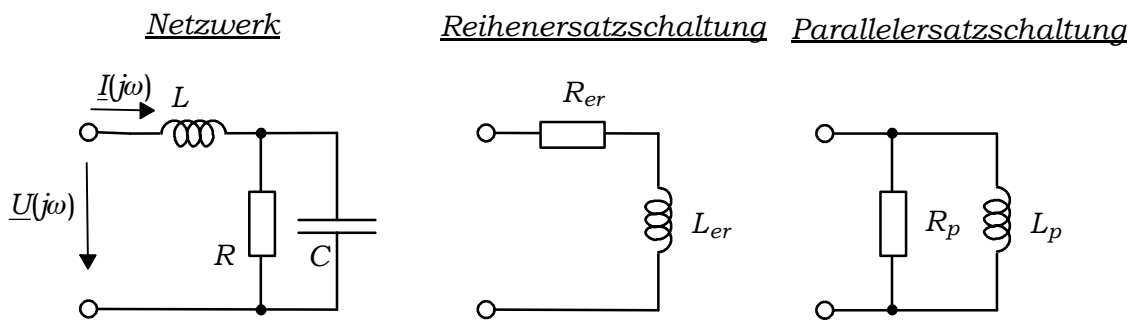


Bild 3.23: Äquivalente Ersatzzweipole des Beispiels

3.4. Blindstromkompensation

Ein wichtiges Ziel der Energietechnik ist es, den Betrag des Gesamtstromes $\underline{I}(j\omega)$ zu einem Verbraucher möglichst klein zu halten, um z.B. Verluste auf den Übertragungsleitungen zu vermeiden.

Beispielsweise haben Wechselstrommotoren niedrige Leistungsfaktoren $\cos \varphi$, da der induktive Anteil am Scheinwiderstand hoch ist. Dies bedeutet, dass viel Blindleistung zwischen Quelle und Verbraucher hin- und herbewegt werden muss, um das magnetische Drehfeld im Motor zu erzeugen. Ein Ersatzschaltbild des Motors zeigt (Bild 3.24). Für den Gesamtstrom gilt - zunächst noch ohne Parallelkapazität -

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L = \underline{U} \left[G - j \frac{1}{\omega L} \right]$$

und für die an den Klemmen aufgenommene Scheinleistung

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = |\underline{U}|^2 \left(G + j \frac{1}{\omega L} \right) = |\underline{U}|^2 G + j \frac{1}{\omega L} |\underline{U}|^2 \quad ,$$

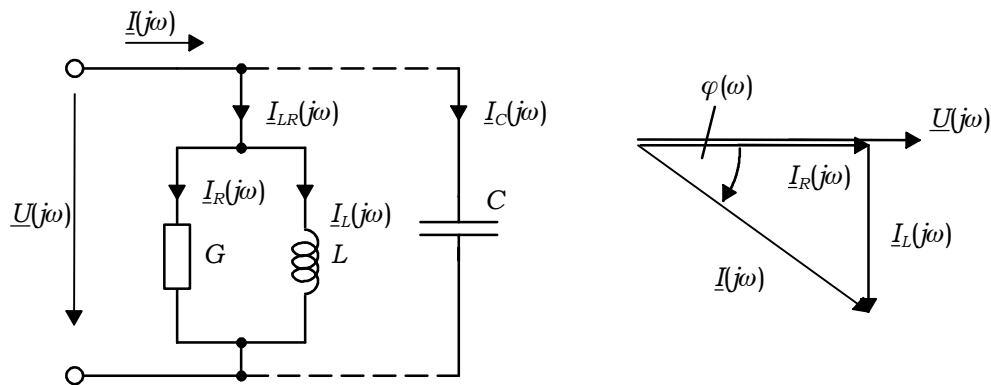


Bild 3.24: Zur Blindstromkompensation

mit der Wirkleistung

$$P = |\underline{U}|^2 G = S \cdot \cos \varphi$$

und der induktiven Blindleistung

$$Q_L = \frac{1}{\omega L} |\underline{U}|^2 = S \cdot \sin \varphi \quad .$$

Die induktive Blindleistung Q_L kann durch eine betragsmäßig gleiche, aber entgegengerichtete kapazitive Blindleistung $Q_C = -Q_L$ ausgeglichen und der Gesamtstrom auf die Wirkkomponente verringert werden. Diese Maßnahme wird als **Blindstromkompensation** bezeichnet und die für den Betrieb des Motors notwendige Blindleistung wird einmalig dem Netz entnommen und schwingt dann zwischen der Parallelkapazität und dem Motor hin und her. Berücksichtigt man die Kapazität, so gilt

$$Q = Q_L - Q_C = |\underline{U}|^2 \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \quad (\text{Glg. 3.52})$$

und aus der Bedingung $Q=0$ kann die notwendige Kapazität berechnet werden; es gilt

$$Q = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} \quad . \quad (\text{Glg. 3.53})$$

Da die vollständige Kompensation sehr aufwendig ist, wird häufig nicht auf $\cos \varphi = 1$, sondern meistens auf $\cos \varphi \approx 0.9$ kompensiert. Bei großen Blindleistungen werden ganze Kondensatorbatterien verwendet und zu dem betreffenden Motor parallel geschaltet.

Verallgemeinerung

Das Prinzip der Blindstromkompensation kann für beliebige Wechselstromnetzwerke erweitert werden, denn für die Scheinleistung an den Klemmen gilt allgemein

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \underline{Z} \cdot |\underline{I}|^2 = \operatorname{Re}[\underline{Z}] \cdot |\underline{I}|^2 + j\operatorname{Im}[\underline{Z}] \cdot |\underline{I}|^2 ,$$

und für die zu kompensierende Blindleistung

$$Q = \operatorname{Im}[\underline{Z}] \cdot |\underline{I}|^2 ,$$

bzw. durch eine entsprechende Herleitung

$$Q = \operatorname{Im}[\underline{Y}^*] \cdot |\underline{U}|^2 .$$

Die notwendige Bedingung lautet nun

$$Q = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}[\underline{Z}] = 0 \quad (\text{Glg. 3.54})$$

oder

$$Q = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}[\underline{Y}^*] = 0 . \quad (\text{Glg. 3.55})$$

Beispiel:

Als Beispiel soll wieder das Netzwerk (Bild 3.20) herangezogen werden, um die Kapazität C zu bestimmen. Die Impedanz wurde bereit berechnet; es gilt

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}\right)$$

und mit (Glg.3.54)

$$0 = \left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}\right) .$$

Diese Gleichung muss nach C aufgelöst werden, man erhält die quadratische Gleichung

$$C^2 - \frac{1}{\omega^2 L} \cdot C + \frac{1}{\omega^2 R^2} = 0 ,$$

mit den beiden Lösungen

$$C_{1/2} = \frac{1}{2\omega^2 L} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\omega^2 L^2}{R^2}}\right) .$$

Davon ist wahrscheinlich eine unbrauchbar, da sie nur durch eine negative Kapazität zu realisieren wäre. Generell existieren reelle Lösungen überhaupt nur dann, wenn der Radikant

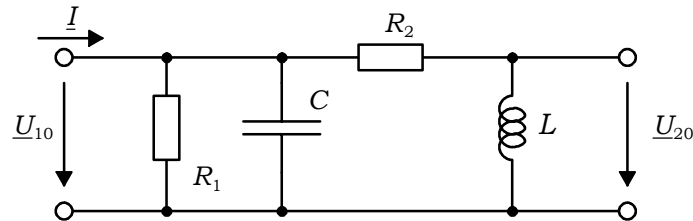
$$1 - 4\frac{\omega^2 L^2}{R^2} \geq 0$$

ist.

3.5. Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

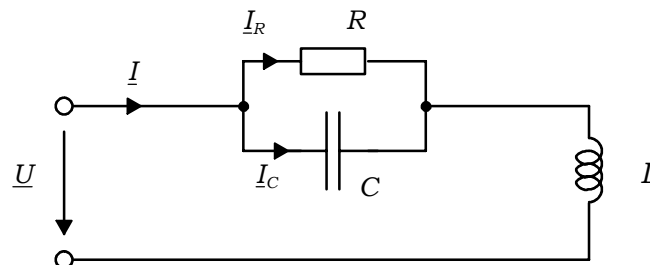
Gegeben ist das nachstehende Wechselstromnetzwerk, mit den Größen $R_1=1\text{k}\Omega$, $R_2=10\text{k}\Omega$ und $L=0.1\text{H}$!



- 1.1. Wie groß muss $C=f(\omega, R_1, R_2, L)$ gewählt werden, damit die am Eingang aufgenommene Blindleistung $Q_{\text{ges}}=0$ wird?
Allgemeine komplexe Rechnung!
- 1.2. Berechnen Sie die Elemente der Reihenersatzschaltung für die Kreisfrequenz $\omega=1\text{kHz}$, wenn $C=1\mu\text{F}$ gewählt wird!

Aufgabe 2:

Gegeben ist das nachstehende Wechselstromnetzwerk, mit den Größen $R=100\Omega$, $C=10\mu\text{F}$ und $L=1\text{mH}$! Es wird an der Wechselspannungsquelle $\underline{U}=24\text{V}$ bei der Frequenz $f=1\text{kHz}$ betrieben!



- 2.1. Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}(j\omega)$ des Netzwerkes in Exponentialform.
- 2.2. Berechnen Sie die Ströme \underline{I} und \underline{I}_C des Netzwerkes in Exponentialform.
- 2.3. Berechnen Sie die von der Schaltung aufgenommene Schein-, Wirk- und Blindleistung.
- 2.4. Bei welcher Kreisfrequenz ω_{Res} ist das Netzwerk in Resonanz?

4. Übertragungsfunktion und Frequenzgang

4.1. Überblick

Die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ eines elektrischen Netzwerkes beschreibt das von der Erregung unabhängige Spannungs- oder Stromübertragungsverhalten des Vierpols in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω .

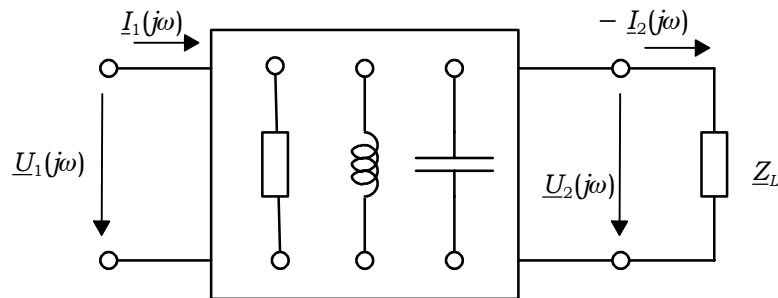


Bild 4.1: Zur Übertragungsfunktion

Die Zählfeilrichtung des Ausgangsstromes $-I_2(j\omega)$ ist bei der in der Vierpoltheorie üblichen symmetrischen Bepfeilung entgegengesetzt. Man unterscheidet in die Spannungsübertragungsfunktion

$$H_U(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega) / \underline{U}_1(j\omega) \quad (\text{Glg. 4.1})$$

und die Stromübertragungsfunktion

$$H_I(j\omega) = - \underline{I}_2(j\omega) / \underline{I}_1(j\omega) \quad . \quad (\text{Glg. 4.2})$$

Für das Produkt der beiden Übertragungsfunktionen gilt

$$H_U(j\omega) \cdot H_I(j\omega) = - \frac{\underline{U}_2(j\omega) \underline{I}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega) \underline{I}_1(j\omega)} \quad , \quad (\text{Glg. 4.3})$$

so dass man für das Übertragungsverhältnis der Scheinleistungen ansetzt

$$H_S(j\omega) = H_U(j\omega) \cdot H_I^*(j\omega) = - \frac{\underline{U}_2(j\omega) \underline{I}_2^*(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega) \underline{I}_1^*(j\omega)} \quad . \quad (\text{Glg. 4.4})$$

4.2. Frequenzgang

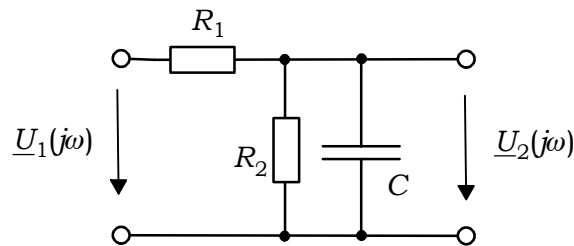
In vielen Fällen interessiert der Frequenzgang der Spannungsübertragungsfunktion nach (Glg.4.1). Dieser ist in der Regel komplexwertig und kann durch eine Ortskurve in der komplexen Ebene dargestellt werden. Oft ist dies aber unanschaulich, und man wählt die getrennte Darstellung des Betragsfrequenzgangs (Amplitudengang) $|H(j\omega)|$ und des Phasengangs $\varphi_H(\omega)$ nach

$$H_U(j\omega) = |H_U(j\omega)| \cdot e^{j\varphi_H(\omega)} \quad . \quad (\text{Glg. 4.5})$$

Sehr gebräuchlich ist auch, da es sich um ein Spannungsverhältnis handelt die logarithmische Darstellung in der Pseudoeinheit Dezibel

$$20 \cdot \log_{10} |H_U(j\omega)| \text{ dB} \quad . \quad (\text{Glg. 4.6})$$

Beispiel 1: Es soll der Amplituden- und der Phasengang des nachfolgenden RC-Netzwerkes berechnet werden.



Mit dem komplexen Spannungsteiler gilt

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C + 1/R_2}}{\frac{1}{j\omega C + 1/R_2} + R_1} = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C + R_1/R_2}$$

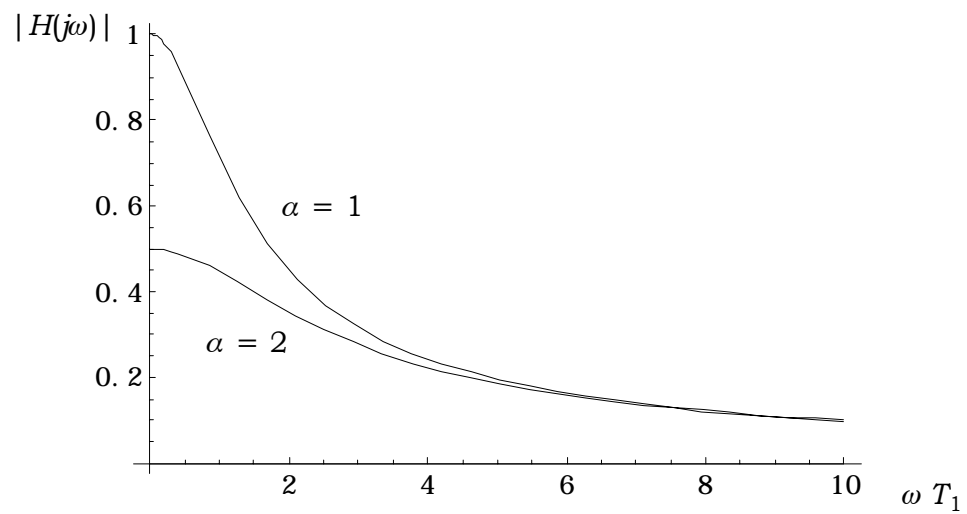
und mit den beiden Abkürzungen

$$a = 1 + R_1/R_2 \quad , \quad T_1 = R_1 C$$

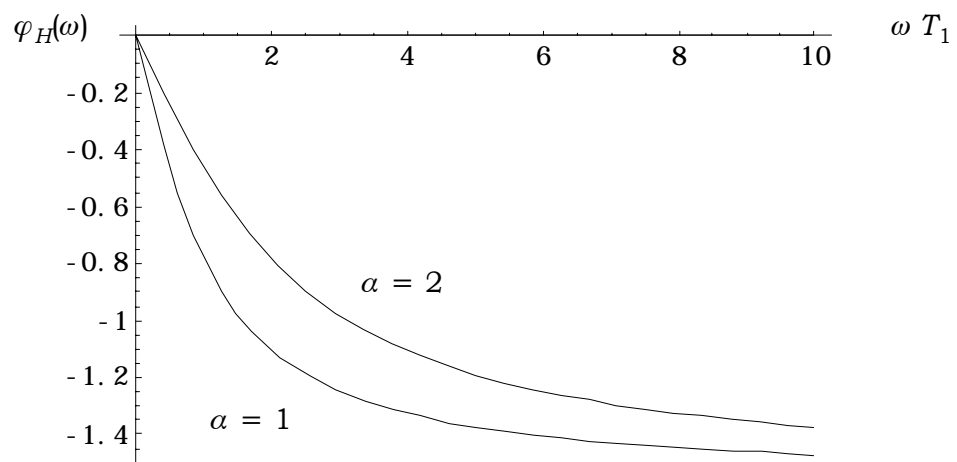
folgt

$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega T_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2 T_1^2}} \cdot e^{-j\arctan(\omega T_1/a)} \quad .$$

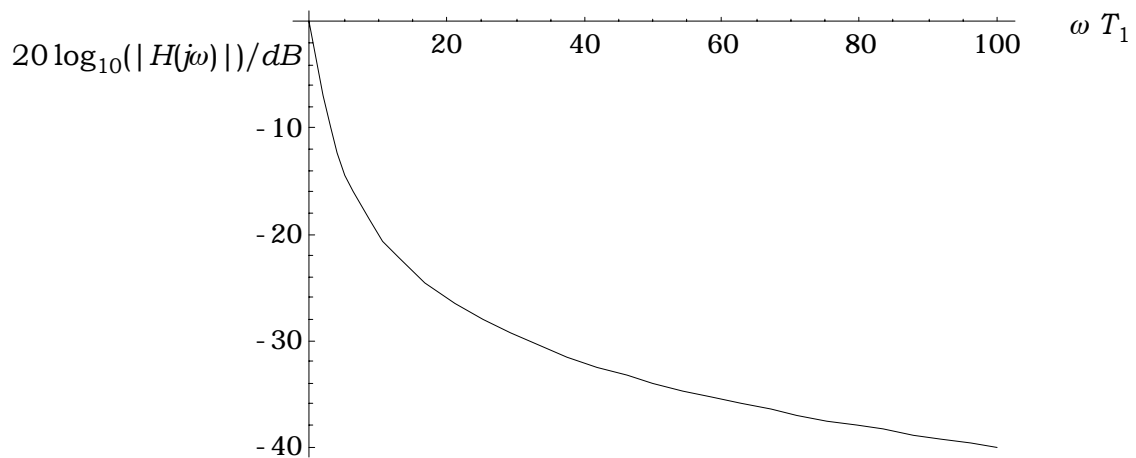
Im nachfolgenden Bild ist der Amplitudengang für $\alpha=1$ und $\alpha=2$ dargestellt.



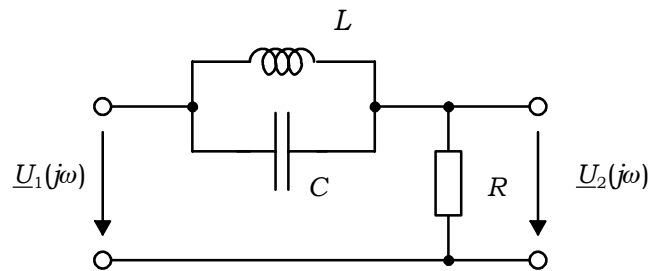
Man erkennt das Tiefpassverhalten des Netzwerks Für den Phasengang erhält man den Verlauf.



Manchmal ist auch der halblogarithmische Verlauf von Interesse.



Beispiel 2: Gegeben ist das im Bild dargestellte RLC -Netzwerk. Man berechne den Amplituden- und den Phasengang.



Mit dem komplexen Spannungsteiler gilt sofort

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}}} = \frac{R}{R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}}$$

und nach Erweitern mit $1 - \omega^2 LC$ schließlich

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{R(1 - \omega^2 LC)}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} \quad .$$

Division durch den Widerstand R , sowie dem Produkt LC liefert mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 = 1/LC \quad , \quad \omega_1 = 1/RC$$

die folgende Form

$$H(j\omega) = \frac{1/LC - \omega^2}{1/LC - \omega^2 + j\omega/RC} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \omega_1} \quad .$$

Üblicherweise wird die Kreisfrequenz ω noch auf die Eigenkreisfrequenz ω_0 normiert und man erhält mit $x = \omega/\omega_0$

$$H(jx) = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + jx\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)} \quad .$$

Hieraus folgt für den Amplitudengang

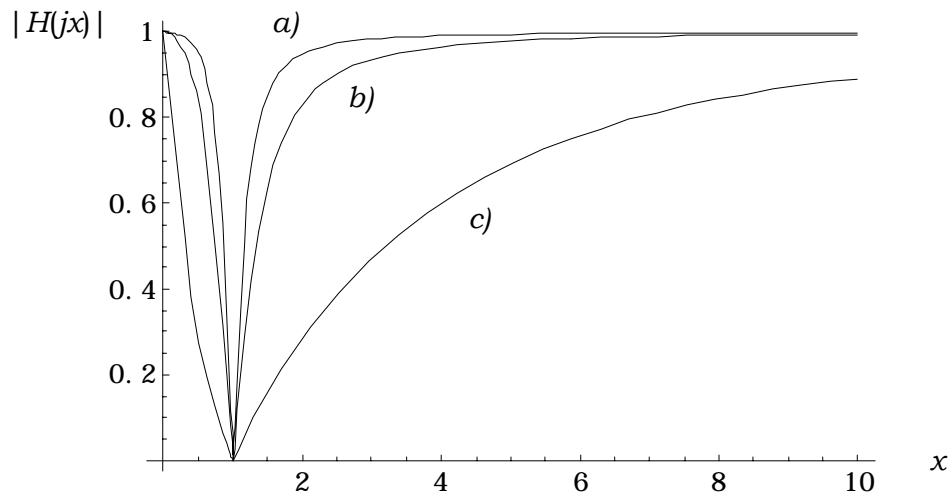
$$|H(jx)| = \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + x^2\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}}$$

und den Phasengang

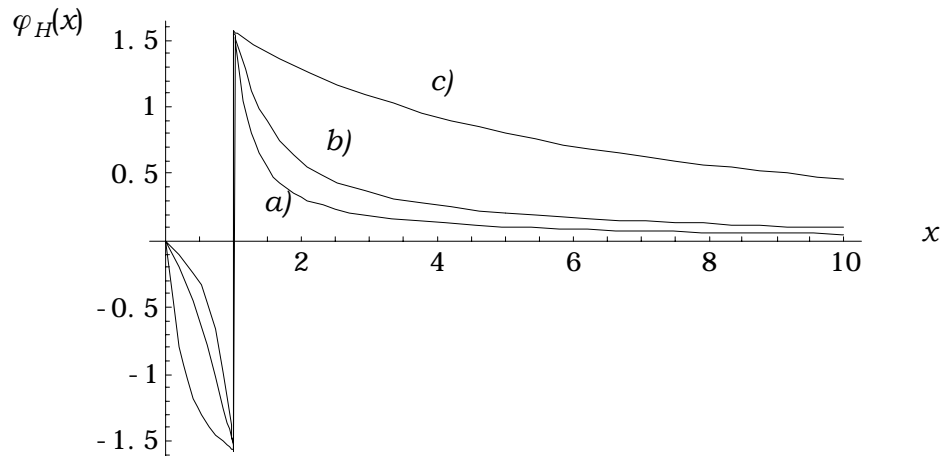
$$\varphi_H(x) = - \arctan\left[\frac{x\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)}{1 - x^2}\right] \quad .$$

Nachfolgend der graphische Verlauf von Amplituden- und Phasengang für die Verhältnisse

$$a) \omega_1/\omega_0 = 0.5 \quad , \quad b) \omega_1/\omega_0 = 1 \quad c) \omega_1/\omega_0 = 5 \quad .$$



Der Amplitudengang entspricht dem einer *Bandsperr*e, mit der Nullstelle $x=1$ und deren Verlauf mit kleiner werdendem Verhältnis ω_1/ω_0 steilflankiger - schmalbandiger - wird. Für den Phasengang erhält man den nachfolgenden Verlauf.



4.3. Frequenzgänge idealer Modellsysteme

Durch die Definition idealer Modellsysteme für das Übertragungsverhalten elektrischer Netzwerke können reale Systeme in ihrer Wirkung charakterisiert und studiert werden. Weiterführende Untersuchungen sind mit Methoden der Funktionentheorie, insbesondere der Fourier-Transformation möglich. Nachfolgend werden die idealisierten Frequenzgänge typischer Filter aufgeführt.

Das *Tiefpassfilter* hat den in (Bild 4.2) dargestellten idealen Verlauf. Die Fortsetzung (Spiegelung) in den Bereich negativer Kreisfrequenzen ist eine Forderung der Fourier-Transformation, die hier nicht weiter erläutert werden soll. Grundsätzlich kann zur Veranschaulichung in der Elektrotechnik auch nur der Bereich $\omega \geq 0$ dargestellt werden.

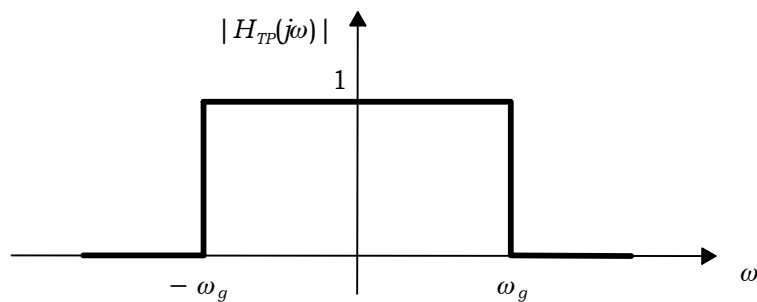


Bild 4.2: Amplitudengang des idealen Tiefpassfilters

Das ideale Tiefpassfilter ist technisch nicht realisierbar, da es ein nichtkausales System führt. Ferner können Amplitudengang und Phasengang nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden. Ein ideales *Hochpassfilter* (Bild 4.3) hat den komplementären Frequenzgang zu (Bild 4.2), d.h. hohe Frequenzen werden unverändert übertragen, niedrige Frequenzen gesperrt; es gilt

$$H_{HP}(j\omega) + H_{TP}(j\omega) = 1 \quad . \quad (\text{Glg. 4.7})$$

Nach (Glg. 4.7) ergänzen sich der ideale Tiefpass (Bild 4.2) und der ideale Hochpass (Bild 4.3) zum idealen Allpassfilter (nicht dargestellt) mit der Übertragungsfunktion $|H_{AP}(j\omega)| = 1$.

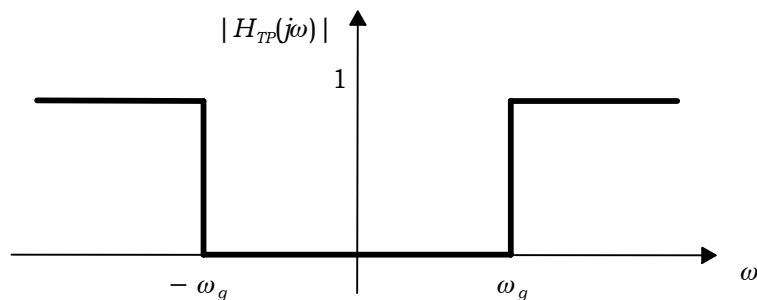


Bild 4.3: Amplitudengang des idealen Hochpassfilters

Ein *Bandpassfilter* lässt einen Frequenzbereich - ein Band der Breite B um die Mittenkreisfrequenz ω_M - unverändert durch und sperrt alle anderen Frequenzen. Der zugehörige Amplitudengang ist in (Bild 4.4) dargestellt.

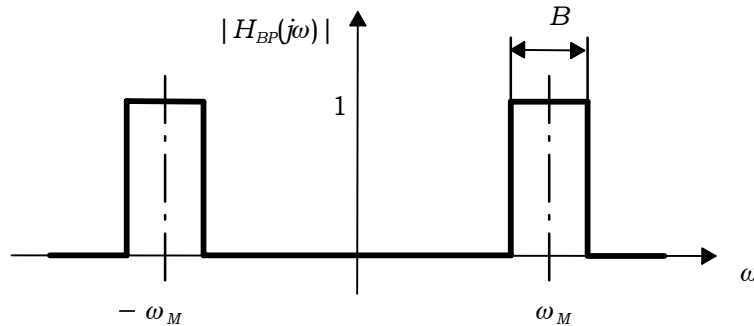


Bild 4.4: Amplitudengang des idealen Bandpassfilters

Es fehlt noch die zum Bandpass komplementäre Bandsperre (Bild 4.5).

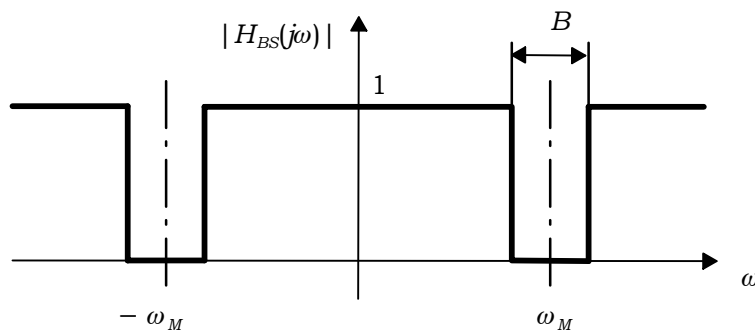


Bild 4.5: Amplitudengang der idealen Bandsperre

4.4. Aufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Spannungsübertragungsfunktion

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega T_1}{(1 + j2\omega T_1) \cdot (2 + j\omega T_1)}$$

eines Bandpassfilters mit der Zeitkonstanten $T_1=RC$.

1. Setzen Sie $x=\omega T_1$ und geben Sie den Betrag $|\underline{H}(jx)|$ und die Phase $\varphi_H(x)$ an.
2. Skizzieren Sie den Amplitudengang $|\underline{H}(jx)|$ und den Phasengang $\varphi_H(x)$.
3. Berechnen Sie $\underline{H}(jx)$ für Gleichspannung und für $\omega \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Spannungsübertragungsfunktion

$$H(j\omega) = \frac{R(1 + (j\omega)^2 LC) + j\omega L}{R(1 + (j\omega)^2 LC) + j2\omega L}$$

einer Bandsperre.

1. Zeigen Sie, dass unter der Verwendung der Abkürzungen

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad , \quad \omega_1 = 1/(RC) \quad \text{und} \quad x = \omega/\omega_0 \quad ,$$

sowie der Dimensionierung $\omega_0=2\omega_1$ für die normierte Übertragungsfunktion $H(jx)$ gilt:

$$H(jx) = \frac{1 - x^2 + jx/2}{1 - x^2 + jx} \quad .$$

2. Geben Sie den Betrag $|H(jx)|$ und die Phase $\varphi_H(x)$ an.
3. Skizzieren Sie den Amplitudengang $|H(jx)|$ (Wertetabelle).